

Math. P.

4307



Math. P.
430 f

Soerz

ELEMENTE

DER

24. 4.

DARSTELLENDE GEOMETRIE

ZUM

SCHULGEBRAUCHE ZUSAMMENGESTELLT

VON

WENZESLAUS PÖZL

PROFESSOR FÜR MATHEMATIK UND DARSTELLENDGEOMETRIE
AN DER K. INDUSTRIESCHULE ZU MÜNCHEN.

•

MÜNCHEN.
THEODOR ACKERMANN
KÖNIGLICHER HOF-BUCHHÄNDLER.

1890.

213



DAVSTELLENDEN GEOMETRIE

XIII

SCHUL-GEOMETRIE NACH DER NEUESTEN METHODE

1801

WILHELM JAKOB FRIEDRICH

LEHRER DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN
VERLAG VON J. NEBEL UND SOHNEN

MÜNCHEN

VERLAG VON J. NEBEL UND SOHNEN

1801

Vorwort.

Das vorliegende Büchlein umfasst die Elemente der darstellenden Geometrie, soweit sie sich auf die orthogonale Darstellung der geometrischen Elementarformen, der geradlinig begrenzten ebenen Gebilde und der ebenflächig begrenzten Körper beziehen.

Es soll ein Leitfaden für den Schulgebrauch sein und keineswegs den Lehrer ersetzen. Demgemäss ist es in seinen leichteren Teilen ziemlich knapp gefasst, um einerseits den Schüler zu eigenem Nachdenken zu veranlassen, andererseits dem Lehrer eine gewisse Freiheit für seine erklärende Beihilfe zu gewähren. Den grundlegenden und den schwierigeren Aufgaben jedoch glaube ich die nötige Ausführlichkeit gewidmet zu haben, so dass sich der Schüler im Bedarfsfalle, z. B. bei Wiederholungen, leicht selbst in denselben zurechtfinden kann. Häufig ist bei den einzelnen Aufgaben auf die besonderen Fälle, welche durch das allgemeine Verfahren sich entweder gar nicht oder nur auf Umwegen erledigen lassen, hingewiesen, um dadurch dem Schüler zu einem grösseren Überblick zu verhelfen, und ihn gewandter und vielseitiger im Auffassen und Arbeiten zu machen.

Sollte jedoch die mangelnde Zeit oder das vorgeschriebene Lehrprogramm eine so eingehende Behandlung des Lehrstoffes verbieten, so kann sich der Unterricht gar wohl auf die Hauptaufgaben beschränken und erst bei einer etwaigen Wiederholung tiefer in den Stoff eindringen. Unter diesem Gesichtspunkte dürfte sich das Büchlein auch für unsere Realschulen empfehlen, obwohl ich mich nicht entschliessen konnte, mich lediglich auf den in denselben zu behandelnden Lehrstoff zu beschränken, weil dadurch die Einheit und Vollständigkeit des Gebotenen zu grosse Einbusse erlitten hätte. Das Lehrbuch soll ja auch dem strebsamen und mit weiter reichenden Fähigkeiten versehenen Schüler Gelegenheit geben, das in der Schule Gelernte selbständig zu vervollkommen und weiter auszudehnen.

Zur Übung — diese ist beim Unterrichte in der darstellenden Geometrie die Hauptsache — ist eine grosse Zahl von Aufgaben teils in den Text eingestreut, teils in einem Anhang nachgetragen, Aufgaben, welche nach dem Muster der bewährtesten Lehrbücher entworfen, zum Teil aus den Absolutoriaaufgaben der österreichischen Oberrealschulen*) und der bayerischen Realschulen**) wörtlich genommen wurden. Eine schätzbare Fundgrube für Aufgaben ist ferner das Lehrbuch der darstellenden Geometrie von W. Marx-Klingensfeld,***) obwohl dieselben in der Mehrzahl über den Zweck eines „Leitfadens“, namentlich für Anfänger, hinausgehen. Ausser diesen Werken wurden noch die Lehrbücher von Schlesinger und Peschka, sowie das altbewährte Buch von Gugler benützt.

*) Dieselben sind von J. Steiner gesammelt und herausgegeben worden (Wien, 1887).

**) auch diese sind von A. Ducrue veröffentlicht worden.

***) Nürnberg, 1885, Korn'sche Buchhandlung.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichnis.

Einleitung.

	Seite
§ 1) Zweck der darstellenden Geometrie	1
§ 2) Methode derselben	1
§ 3) Die verschiedenen Projektionsarten	1

I. Abschnitt.

Die geometrischen Elementarformen.

I. Kapitel.

Darstellung des Punktes.

§ 4) Projektion des Punktes auf eine Tafel	2
§ 5) Projektion des Punktes auf zwei sich rechtwinklig schneidende Tafeln	2
§ 6) Das Zusammenlegen (Umklappen) der beiden Tafeln	3
§ 7) Die vier Raumteile	3
§ 8) Verschiedene Lagen des Punktes — die Halbierebene des Systems	4
§ 9) Deckpunkte	5
§ 10) Coordinaten eines Punktes	6
§ 11) Das Auseinanderlegen der beiden Tafeln	6

II. Kapitel.

Darstellung der Geraden.

§ 12) Projektion der Geraden auf die beiden Tafeln	7
§ 13) Die Lot-Gerade	7
§ 14) Die „gelehnte“ Gerade	8
§ 15) Verschiedene Lagen der Geraden	8
§ 16) Punkt und Gerade — die Spuren der Geraden	9
§ 17) Sich schneidende Gerade	10
§ 18) Parallele Gerade	10
§ 19) Sich kreuzende oder windschiefe Gerade	10
§ 20) Deckgerade	11

III. Kapitel.

Darstellung der Ebene.

§ 21) Projektion der Ebene auf die beiden Tafeln	12
§ 22) Die Spuren der Ebene	12
§ 23) Verschiedene Lagen der Ebene	13
§ 24) Das Aufsuchen der Spuren der Ebene	13
§ 25) Parallele Ebenen	14

IV. Kapitel.

Die gelehnte Gerade.

§ 26) Projektion der gelehnten Geraden auf drei sich rechtwinklig schneidende Tafeln	14
§ 27) Aufgaben über die gelehnte Gerade	16
§ 28) Beliebige Lage der dritten Tafel	17

V. Kapitel.

Seite

Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen.

§ 29)	Das Zusammenfallen von Punkten, Geraden, Ebenen	18
§ 30)	Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene	19
§ 31)	Schnittgerade zweier Ebenen	23
§ 32)	Aufgaben über die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen	26
§ 33)	Die senkrechte Lage zweier Geraden	28
§ 34)	Die senkrechte Stellung einer Geraden und Ebene	29
§ 35)	Aufgaben über senkrechte Lage von Geraden, Ebenen	30

VI. Kapitel.

Gegenseitige Entfernung und Neigung von Punkten, Geraden, Ebenen.

§ 36)	Gestalt und Grösse eines Gebildes, welches auf seine eigene oder eine parallele Ebene projiziert wird	32
§ 37)	Die Bestimmungsstücke für ein neues Tafelsystem	33
§ 38)	Projektion eines Punktes auf ein schiefwinkliges Tafelsystem	33
§ 39)	Die vier Raumteile eines schiefwinkligen Tafelsystems	34
§ 40)	Übertragung eines Punktes in ein neues Tafelsystem	36
§ 41)	Die Entfernung zweier Punkte zu finden	38
§ 42)	Andere Lösung der vorstehenden Aufgabe. — Das Längendreieck einer Strecke	39
§ 43)	Eine weitere Lösung derselben Aufgabe	39
§ 44)	Die Winkel einer Geraden mit den beiden Tafeln	40
§ 45)	Beziehungen zwischen diesen beiden Winkeln	40
§ 46)	Zusammenhang zwischen Strecke und ihrer Projektion	41
§ 47)	Winkel einer Ebene mit den beiden Tafeln	41
§ 48)	Beziehungen zwischen diesen Winkeln	43
§ 49)	Entfernung eines Punktes von einer Ebene	43
§ 50)	Entfernung eines Punktes von einer Geraden	45
§ 51)	Winkel zweier sich schneidenden Geraden	45
§ 52)	Entfernung und Winkel zweier windschiefen Geraden	46
§ 53)	Winkel einer Geraden und einer Ebene	48
§ 54)	Winkel zweier Ebenen	49
§ 55)	Gerade, welche mit den Tafeln vorgeschriebene Winkel bilden	50
§ 56)	Ebenen, welche mit einer Tafel gegebene Winkel einschliessen	51
§ 57)	Ebenen, welche mit anderen Ebenen bestimmte Winkel bilden	52
§ 58)	Ebenen, welche mit beiden Tafeln vorgeschriebene Winkel bilden	53
§ 59)	Aufgaben	55

VII. Kapitel.

Geschlossene ebene Figuren (Polygone).

§ 60)	Wahre Gestalt eines Dreiecks	56
§ 61)	Zusammenhang zwischen dem Riss eines Gebildes und dem umgelegten Original. — Affine Figuren. —	57
§ 62)	Affinität des ersten und zweiten Risses ebener Figuren	58
§ 63)	Aufgaben	58
§ 64)	Beziehung zwischen dem Flächeninhalt eines Polygons und jenem seiner Projektion	60

II. Abschnitt.

Räumliche Gebilde.

VIII. Kapitel.

Das körperliche Dreieck (Dreikant).

§ 65)	Das Dreikant, Scheiteldreikant, Nebendreikant	60
-------	---	----

	Seite
§ 66) Das Polardreikant	61
§ 67) Beziehungen zwischen den Bestandteilen eines Dreikants	61
§ 68) Bestimmungsstücke des Dreikants	62
§ 69) Konstruktion eines Dreikants aus seinen 3 Seiten	63
§ 70) Konstruktion eines Dreikants aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel	65
§ 71) Konstruktion eines Dreikants aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel	66
§ 72) Konstruktion eines Dreikants aus einer Seite und den anliegenden Winkeln	67
§ 73) Konstruktion eines Dreikants aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel	68
§ 74) Konstruktion eines Dreikants aus seinen drei Winkeln	69
§ 75) Aufgaben	70

IX. Kapitel.

Polyeder.

§ 76) Begriff des Polyeders	71
§ 77) Allgemeines über die Darstellung der Polyeder. — Umriss	71
§ 78) Sichtbare und unsichtbare Punkte und Linien an den Polyedern	71
§ 79) Die Entwicklung eines Polyeders	73
§ 80) Die Pyramide und ihre Darstellung	73
§ 81) Der Pyramidenstumpf und seine Darstellung	78
§ 82) Das Prisma und seine Darstellung	80
§ 83) Die regulären Polyeder	82

X. Kapitel.

Schnitte der Polyeder mit Ebenen.

§ 84) Die Schnittfigur einer Ebene und eines Polyeders	86
§ 85) Schnitt eines Polyeders mit einer Lotebene	87
§ 86) Schnitt eines Polyeders mit einer allgemeinen Ebene	87
§ 87) Die wahre Grösse der Schnittfigur	87
§ 88) Schnitt der Pyramiden mit Ebenen	88
§ 89) Zusammenhang zwischen der Grundfläche einer Pyramide und der in die Grundflächenebene umgeklappten Schnittfigur	90
§ 90) Die wahre Schnittfigur ohne die Risse derselben herzustellen	91
§ 91) Schnitt der Prismen mit Ebenen	94
§ 92) Durchdringungspunkte einer Geraden und eines Polyeders	95

XI. Kapitel.

Durchschnitt von Polyedern mit Polyedern.

§ 93) Durchdrungsfigur zweier sich schneidenden Polyeder	96
§ 94) Konstruktion dieser Durchdrungsfigur	96
§ 95) Volle Durchdringung und gegenseitiger Ausschnitt zweier Körper	97
§ 96) Durchdringung zweier Tetraeder, Pyramiden und Prismen	97

A n h a n g.

Verschiedene Übungsaufgaben	103
---------------------------------------	-----

1. Kapitel

2. Kapitel

3. Kapitel

4. Kapitel

5. Kapitel

6. Kapitel

7. Kapitel

8. Kapitel

9. Kapitel

10. Kapitel

11. Kapitel

12. Kapitel

13. Kapitel

14. Kapitel

15. Kapitel

16. Kapitel

Einleitung.

§ 1. Die „darstellende Geometrie“ lehrt räumliche Gegenstände durch Zeichnung darstellen. Die Zeichnung soll einerseits ein möglichst deutliches Bild des Gegenstandes geben, andererseits auch gestatten, nach ihr den Gegenstand selbst in seinen einzelnen Teilen herzustellen. Dazu wird die genaue Kenntnis der Beziehungen zwischen Zeichnung und Raumgegenstand erfordert, deren Erforschung daher ebenfalls Aufgabe der darstellenden Geometrie ist.

§ 2. Die Zeichnung wird gewöhnlich in einer Ebene ausgeführt, welche man Projektionsebene oder Tafel nennt. Das Verfahren bei der Herstellung der Zeichnung, oder das „Projizieren“, besteht darin, dass man den darzustellenden Gegenstand, als welcher hier vorläufig ein Punkt gelten mag, durch eine gerade Linie, den projizierenden Strahl, mit demjenigen Punkte verbindet, aus welchem das Projizieren vorgenommen wird und der Projektionszentrum heisst. Der Schnittpunkt des projizierenden Strahles mit der Projektionsebene oder Tafel ist die Projektion (Bild oder Riss) des Punktes.

§ 3. Wird als Projektionszentrum irgend ein endlich gelegener Punkt, z. B. das Auge des Zeichners, angenommen, so dass die projizierenden Strahlen aller Punkte des darzustellenden Gebildes in dem Projektionszentrum zusammenlaufen, so heisst diese Darstellungsweise Zentralprojektion; rückt hingegen das Projektionszentrum ins Unendliche, wobei sämtliche projizierende Strahlen parallel werden, so entsteht die Parallelprojektion, und zwar die schiefe Parallelprojektion, wenn die projizierenden Strahlen zur Bildebene schief laufen, und die rechtwinklige oder Orthogonalprojektion, wenn die projizierenden Strahlen die Tafel senkrecht treffen.

Jede dieser Projektionsarten hat ihre Vorteile. Die beiden ersten geben meist ein der Wirklichkeit nahekommendes Bild (Sehprozess), während die Orthogonalprojektion eine bequeme Auffindung der einzelnen Dimensionen des dargestellten Objektes gestattet. Sie wird daher bei technischen Zeichnungen vorzugsweise angewendet, und soll auch im Nachfolgenden ausschliesslich von ihr die Rede sein.

Anmerkung. Der Begründer der wissenschaftlichen „darstellenden Geometrie“ (géométrie descriptive), namentlich der Orthogonalprojektion, ist der Franzose G. Monge (1746—1818). Seine über diesen Gegenstand gehaltenen Vorlesungen wurden, nach den Aufzeichnungen seiner Zuhörer, zu Paris 1795 zum erstenmale gedruckt.

I. Abschnitt.

Die geometrischen Elementargebilde.

Punkt, Gerade, Ebene.

Alle räumlichen Gegenstände sind von ebenen oder krummen Flächen begrenzt; diese hinwieder entstehen durch stetige Aufeinanderfolge oder Bewegung der geometrischen Elementarformen: Punkt, Gerade, Ebene, mit deren Darstellung man sich daher zunächst vertraut zu machen hat.

I. Kapitel.

Darstellung des Punktes.

§ 4. Um einen Punkt auf irgend eine Ebene zu projizieren, ist nach § 2 der projizierende Strahl, welcher nunmehr ein Lot wird, zu ziehen; sein Schnittpunkt mit jener Ebene ist die gesuchte Projektion oder der Riss des Punktes. Demnach entspricht jedem Punkt im Raume ein und nur ein Punkt der Projektionsebene oder Tafel als sein Riss.

Wird hingegen ein beliebiger Punkt der Tafel als Riss in's Auge gefasst und fragt man nach dem zugehörigen Raumpunkt, so ist dieser in dem projizierenden Lote des Risspunktes zu suchen und zwar kann jeder Punkt dieses Lotes als der gesuchte Raumpunkt gelten. Demnach gehören zu einem Risspunkt in einer Tafel unzählig viele Raumpunkte oder: Ein Punkt ist durch seinen Riss in **einer** Tafel nicht vollständig bestimmt.

§ 5. Dieser Unbestimmtheit wird dadurch abgeholfen, dass man die Entfernung des Raumpunktes von der Tafel angibt, sei es durch beigeschriebene Zahlen (Coten), oder wieder durch Zeichnung. Das erstere wird thatsächlich in gewissen Fällen (z. B. bei Nivellements) angewendet, das letztere erreicht man durch Projizieren des Punktes auf eine zweite die erste rechtwinklig schneidende Ebene. Es ist daher zunächst zu untersuchen, wie sich die Risse eines Punktes in zwei solchen Tafeln gestalten.

Die zwei auf einander senkrecht stehenden Ebenen bezeichnen wir als rechtwinkliges Tafelsystem, und nennen die eine horizontale oder erste Tafel (abgekürzt $\mathfrak{T}_1$, Tafel eins), die andere vertikale oder zweite Tafel ($\mathfrak{T}_2$), während ihre Schnittlinie den Namen Projektionsachse oder schlechthin Achse ($\mathfrak{A}$) erhält. Ferner bezeichnen wir einen Punkt im Raume mit kleinem lateinischen Buchstaben, seine Risse in den Tafeln mit demselben Buchstaben, dem aber der Zeiger der betreffenden Tafel unten angefügt wird. Demnach ist a der Punkt im Raume, a_1 (a eins) sein erster Riss (R_1), a_2 (a zwei) sein zweiter Riss (R_2) u. s. w.

Die beiden aus a auf die Tafeln gefällten projizierenden Lote aa_1 und aa_2 (Fig. 1) bestimmen eine Ebene, die auf jeder der Tafeln und der Achse senkrecht steht und die $\mathfrak{T}_1$ in der Geraden a_1a_0 , die $\mathfrak{T}_2$ in a_0a_2 schneidet, welche beiden Geraden in a_0 auf der Achse ebenfalls senkrecht stehen. a_0 wollen wir den Achsenriss des Punktes a nennen, die Strecken aa_1 seinen ersten, aa_2 seinen zweiten Abstand, a_1a_0 seine erste, a_0a_2 seine zweite Ordinate (O_1, O_2).

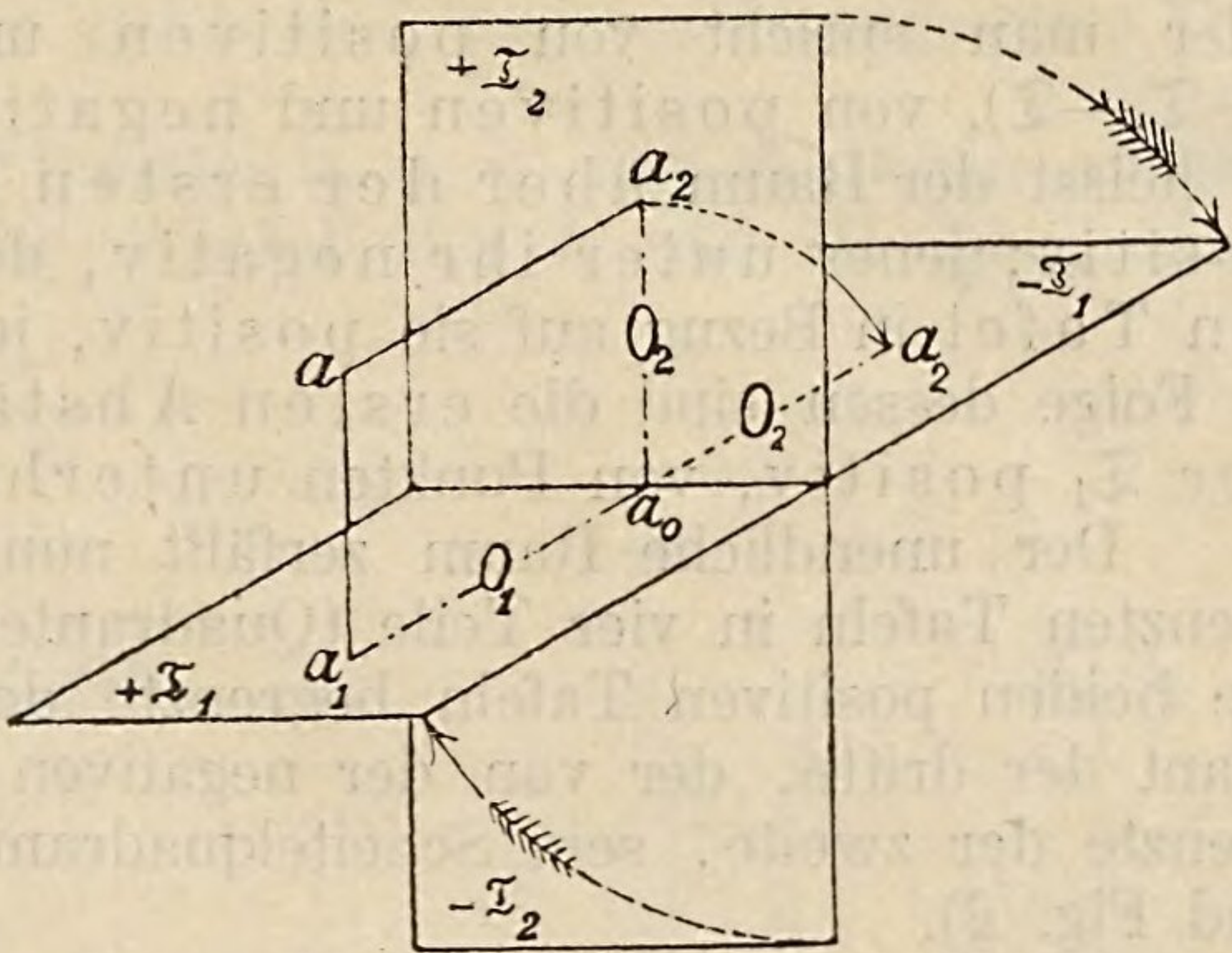


Fig. 1.

Das ebene Viereck $aa_1a_0a_2$ ist ein Rechteck und es ist daher die erste Ordinate eines Punktes seinem zweiten Abstand, und die zweite Ordinate seinem ersten Abstand gleich, oder allgemein: In einem rechtwinkligen Tafelsysteme ist stets jede Ordinate eines Punktes gleich dem Abstände desselben von der nicht gleichnamigen oder **zugeordneten** Tafel.

§ 6. Das Zeichnen in zwei verschiedenen Ebenen ist unbequem; man vereinigt daher beide Tafeln zu einer einzigen Zeichenebene, was am einfachsten dadurch bewirkt wird, dass man eine der Tafeln, beispielsweise die $\mathfrak{T}_2$, so lange um die Achse dreht (umklappt), bis sie mit der anderen zusammenfällt. Während dieser Bewegung bleibt die gedrehte Ordinate immer auf der Achse senkrecht und fällt nach vollzogener Umklappung in die Richtung der anderen Ordinate. Daher:

Die beiden Risse eines Punktes müssen stets in einer zur Achse senkrechten Geraden, dem Achsenlot, liegen (Fig. 1).

Durch zwei unter dieser Voraussetzung beliebig angenommene Punkte in den beiden Tafeln ist nun ein Punkt im Raum vollständig bestimmt (§§ 4 u. 5). Denn klappt man die eine Tafel auf und errichtet in den beiden Rissen die projizierenden Lote, so liegen diese in einer (durch die Ordinaten bestimmten) Ebene und schneiden sich daher in dem gesuchten Punkt.

Folgerung: Das Achsenlot ist, soferne der eine Riss eines Punktes bekannt ist, geometrischer Art für den anderen.

Anmerk. Achsenlote sollen in allen Figuren strichpunktiert (— · — · —), Hilfslinien gestrichelt (---), unsichtbare Linien punktiert (...), die übrigen voll gezeichnet werden.

§ 7. Die Achse teilt jede der unbegrenzten Tafeln in zwei Teile, welche durch die Bezeichnung positiv und negativ von einander unterschieden werden, weil die in ihnen gelegenen Ordi-

naten von der Achse aus entgegengesetzte Richtung zeigen, wie leicht aus Fig. 1 zu ersehen ist. Diese Bezeichnung nehmen dann auch alle in den betreffenden Tafelteilen liegende Linien an, oder man spricht von positiven und negativen Tafeln ($+\mathfrak{T}, -\mathfrak{T}$), von positiven und negativen Ordinaten. Ebenso heisst der Raum über der ersten Tafel im Bezug auf diese positiv, jener unter ihr negativ, der Raum vor der zweiten Tafel in Bezug auf sie positiv, jener hinter ihr negativ. In Folge dessen sind die ersten Abstände von Punkten über der $\mathfrak{T}_1$ positiv, von Punkten unterhalb negativ u. s. w.

Der unendliche Raum zerfällt nun durch die beiden unbegrenzten Tafeln in vier Teile (Quadranten), von denen der durch die beiden positiven Tafeln begrenzte der erste, sein Scheitelquadrant der dritte, der von der negativen $\mathfrak{T}_1$ und positiven $\mathfrak{T}_2$ begrenzte der zweite, sein Scheitelquadrant der vierte heisst (Fig. 1 und Fig. 2).

Die Umklappung der Tafeln wird gewöhnlich so vollzogen, dass die $+\mathfrak{T}_2$ auf die $-\mathfrak{T}_1$, somit die $-\mathfrak{T}_2$ auf die $+\mathfrak{T}_1$ fällt; in der Zeichenebene gilt dann der vor (unter) der Achse liegende Teil als $+\mathfrak{T}_1$ (und $-\mathfrak{T}_2$), der hinter (über) ihr befindliche als $+\mathfrak{T}_2$ ($-\mathfrak{T}_1$) (Fig. 2 und Fig. 2^a).

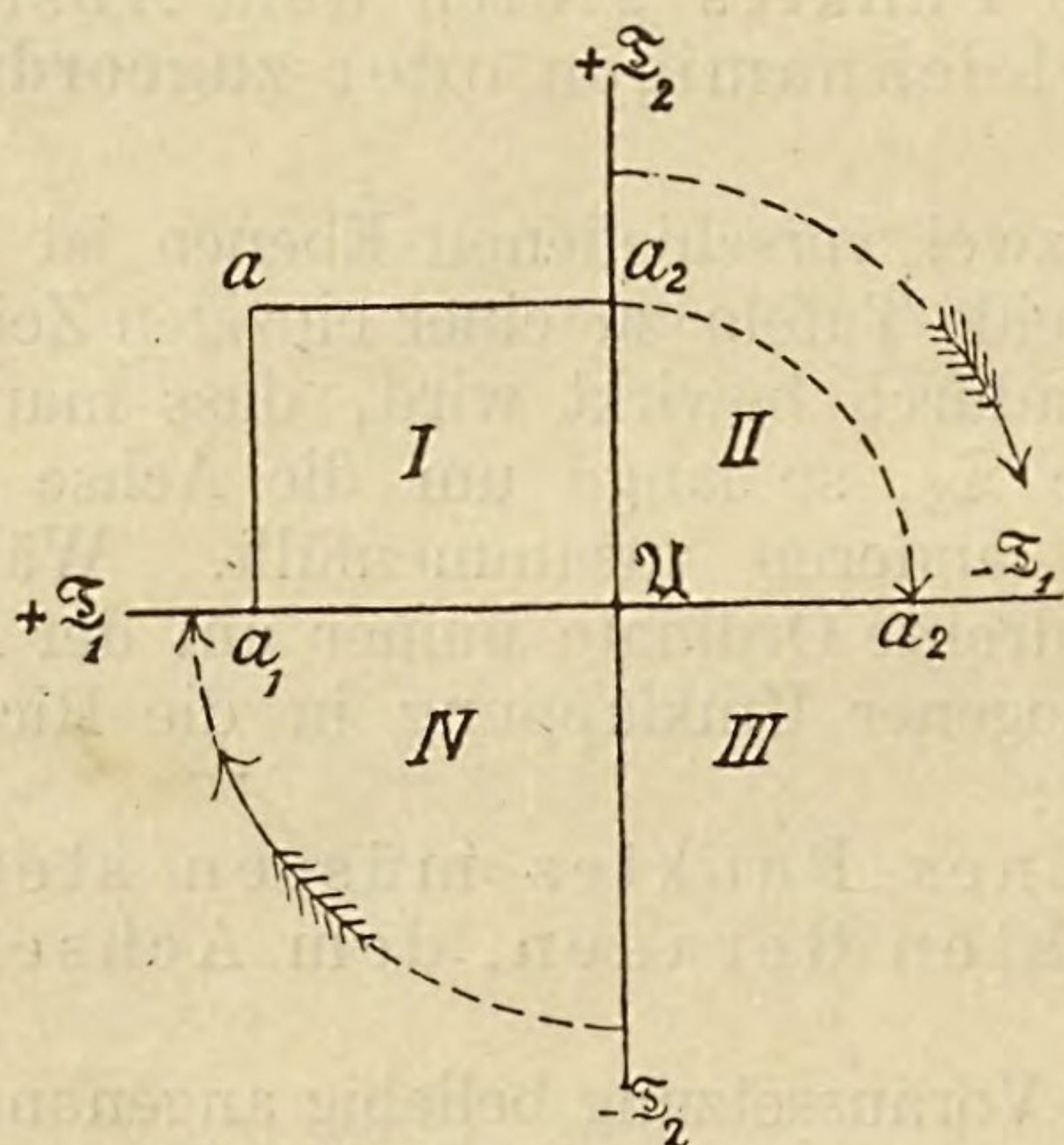


Fig. 2.

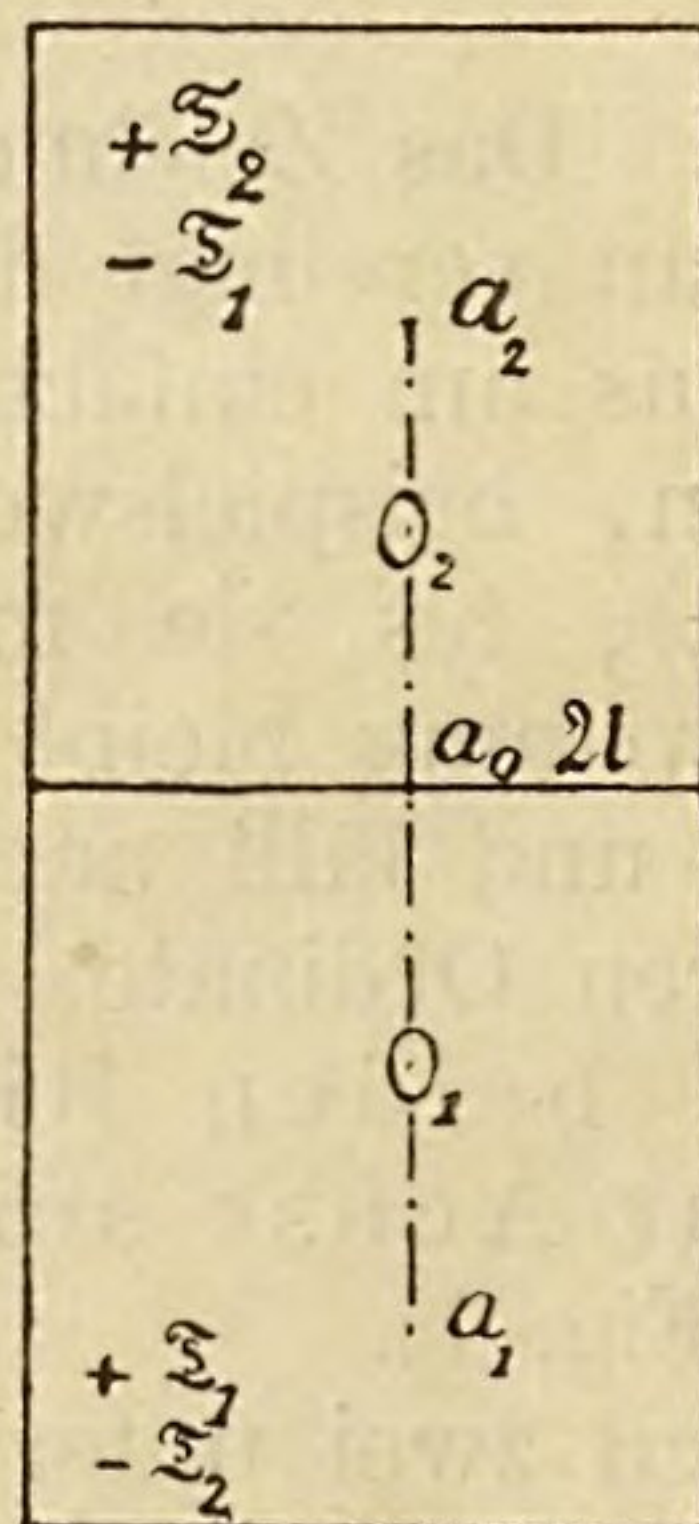


Fig. 2a.

Anmerk. Der oben (§ 5) ausgesprochene Satz über die Gleichheit der Ordinaten und Abstände hat, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, Giltigkeit sowohl in Bezug auf Grösse als auch auf die Vorzeichen.

§ 8. Nach den vorstehenden Erörterungen begegnet es nun keiner Schwierigkeit mehr, jeden Punkt im Raume darzustellen.

Aufgabe 1. Man stelle Punkte dar, welche im I., II., III., IV. Quadranten, in einer der Tafeln, in der Achse liegen, und gebe von jedem die Ordinaten und Abstände mit Berücksichtigung der Vorzeichen an.

Aufgabe 2. Man suche sich zu beliebig angenommenen Rissen die wirklichen Punkte im Raume zu vergegenwärtigen, ins-

besondere: Welches ist der geometrische Ort a) derjenigen Punkte, deren Ordinaten gleich und mit gleichem Vorzeichen versehen sind, b) derjenigen Punkte, deren erster und zweiter Riss zusammenfallen oder deren Ordinaten gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben?

Die ersteren dieser Punkte (a u. b, Fig. 3) liegen in derjenigen Ebene, welche die Winkel des I. und III. Quadranten

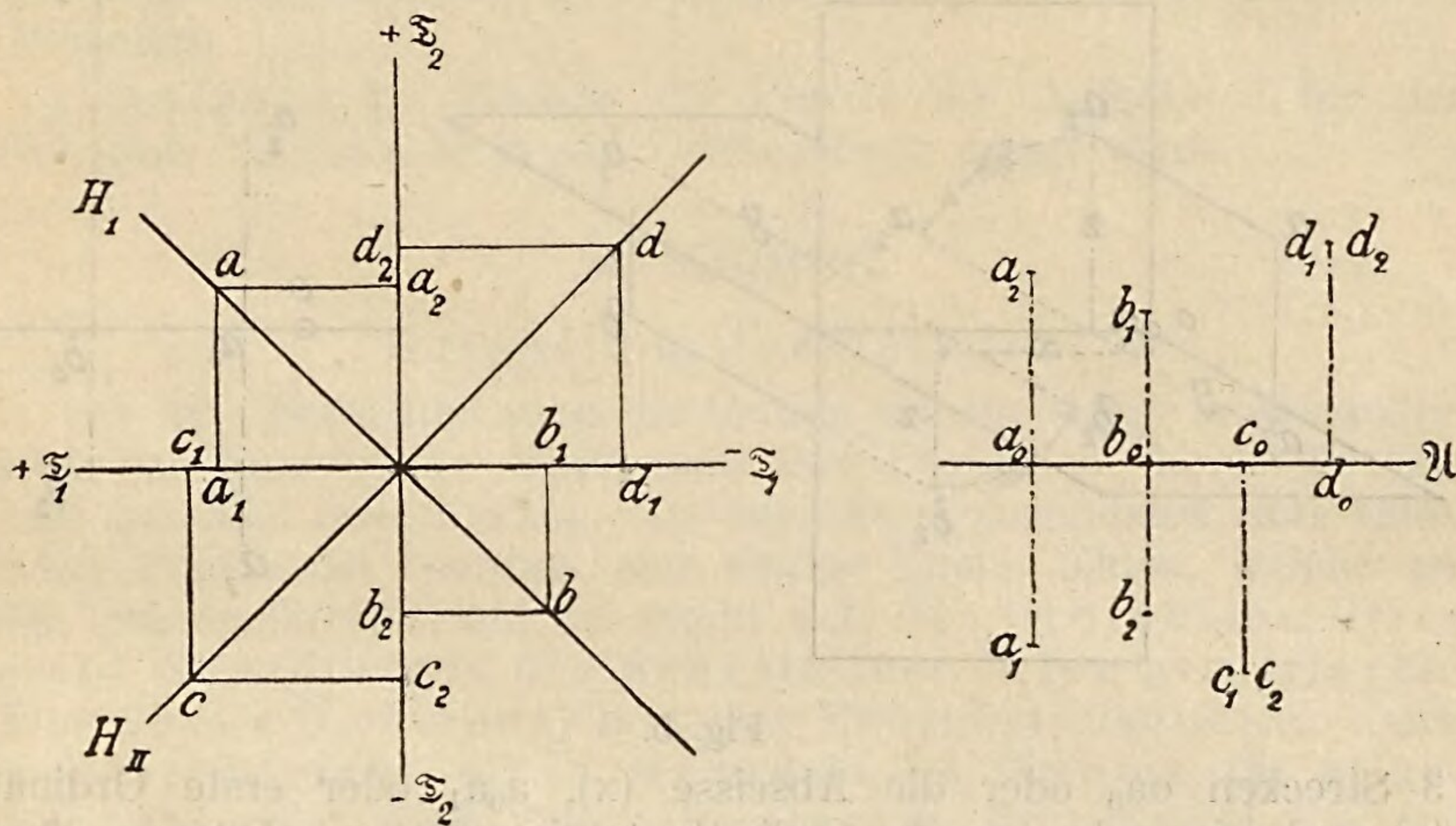


Fig. 3.

halbirt (I. Halbierebene H_I des Systems), die anderen (c u. d Fig. 3), in der Halbierebene des Winkels des II. und IV. Quadranten (II. Halbierebene H_{II}).

§ 9. Liegen zwei oder mehrere Punkte (Fig. 4) in einem

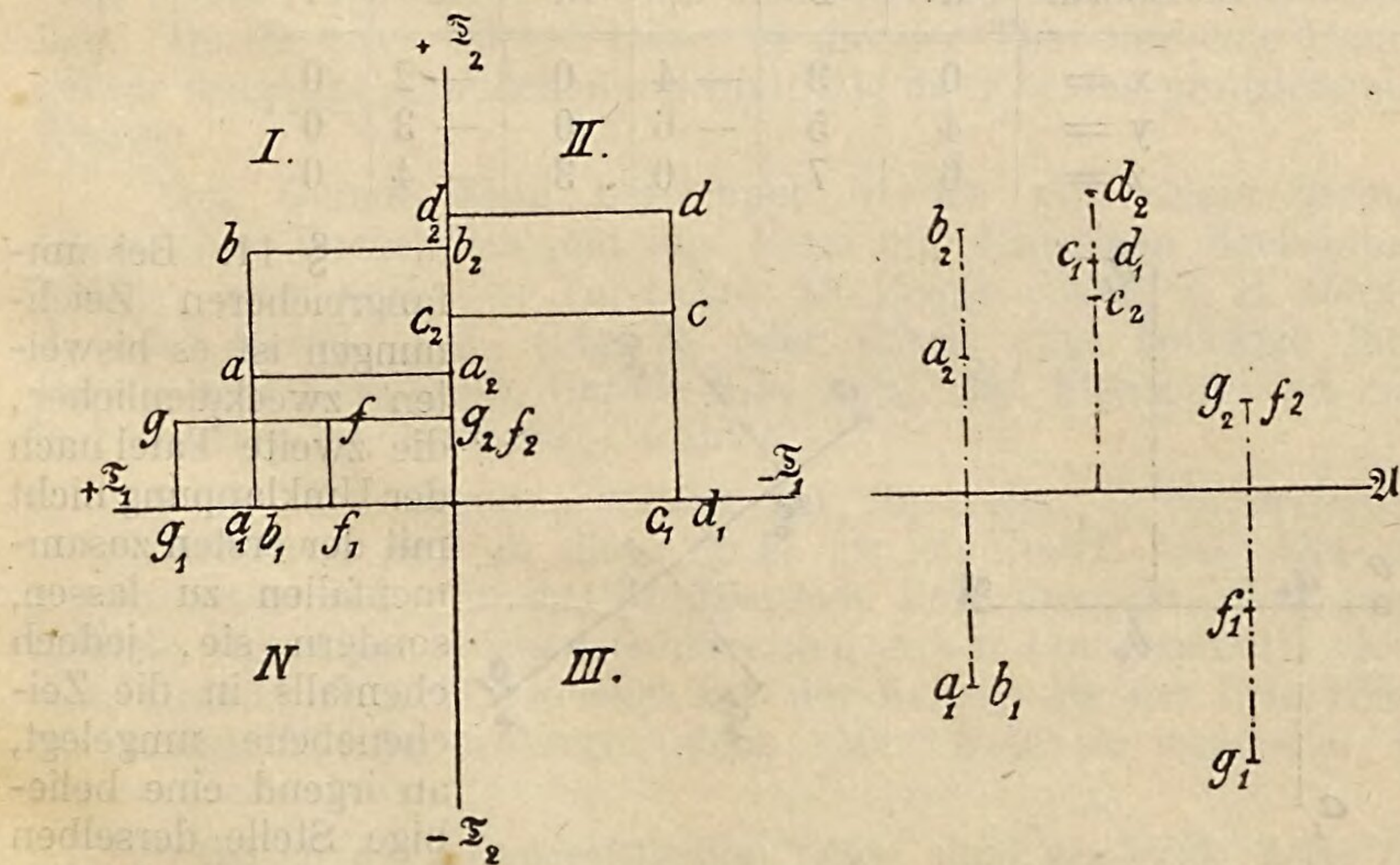


Fig. 4.

projizierenden Lote, so haben sie einen Riss gemeinsam (§ 4); man nennt sie dann Deckpunkte*) und zwar erste, wenn sich die ersten, und zweite Deckpunkte, wenn sich die zweiten Risse decken.

§ 10. Will man mehrere Punkte in feste gegenseitige Verbindung bringen, so kann man in der Achse einen beliebigen Punkt o (Fig. 5) als Ausgangspunkt (Ursprung) nehmen und die

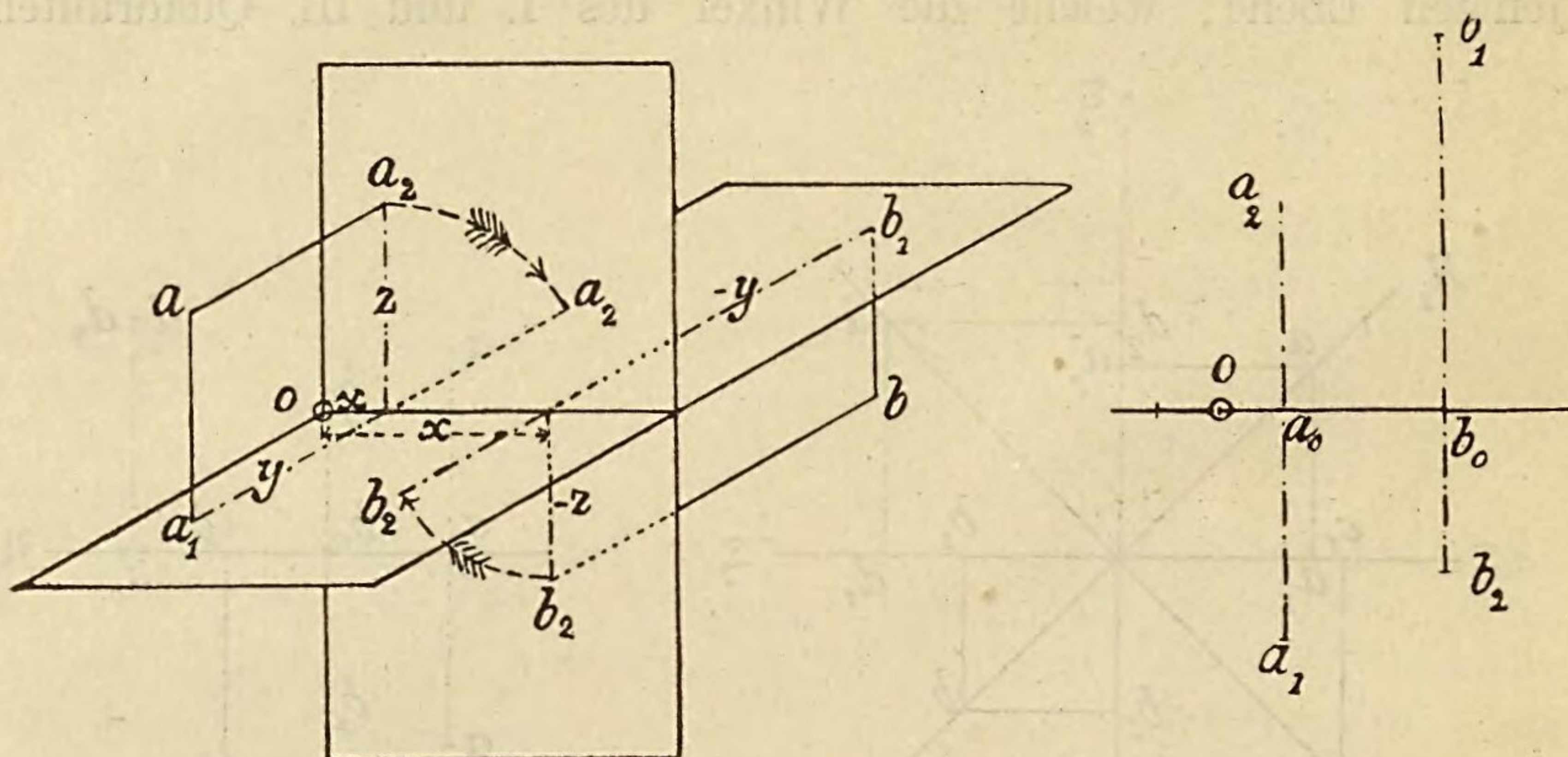


Fig. 5.

3 Strecken oa_0 oder die Abscisse (x), a_0a_1 oder erste Ordinate (y) und a_0a_2 oder zweite Ordinate (z) in einem beliebigen Massstabe geben. Die Abscissen der auf entgegengesetzten Seiten von o befindlichen Punkte sind dann mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen. (Vergleiche § 27, Anmerk.)

Aufgabe 3. Man stelle folgende Punkte dar:

Coord.	a	b	c	d	e	f
$x =$	0	3	— 4	0	— 2	0
$y =$	4	5	— 6	0	— 3	0
$z =$	6	7	0	3	— 4	0

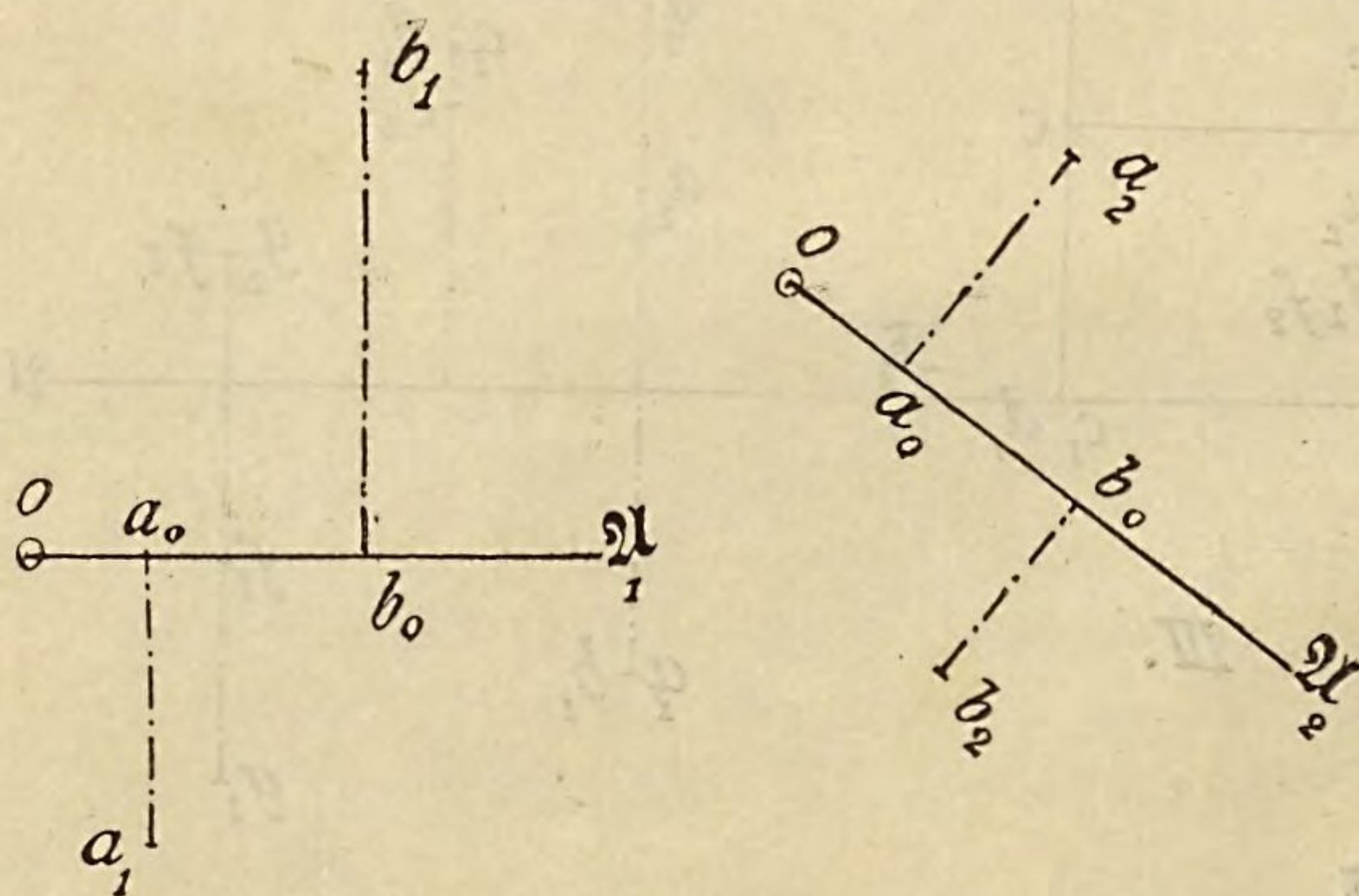


Fig. 6.

§ 11. Bei umfangreicheren Zeichnungen ist es bisweilen zweckdienlicher, die zweite Tafel nach der Umklappung nicht mit der ersten zusammenfallen zu lassen, sondern sie, jedoch ebenfalls in die Zeichenebene umgelegt, an irgend eine beliebige Stelle derselben zu versetzen. In die-

*) J. Schlesinger, die darstellende Geometrie, Wien 1870.

sem Falle erscheint die Achse doppelt (Fig. 6) als $\mathfrak{A}_1$, den positiven und negativen Teil der $\mathfrak{T}_1$ trennend, und als $\mathfrak{A}_2$, den positiven Teil der $\mathfrak{T}_2$ von dem negativen sondernd. Ebenso treten die Achsenrisse der Punkte doppelt auf, sowohl in $\mathfrak{A}_1$ als $\mathfrak{A}_2$, und ist ihre Lage in denselben dadurch bestimmt, dass die gegebenen Abscissen von dem willkürlichen Punkte o aus in beiden Achsen gleich aufgetragen werden müssen*). In $\mathfrak{T}_1$ erscheinen dann nur erste Risse und erste Ordinaten, in $\mathfrak{T}_2$ hingegen nur zweite Risse und zweite Ordinaten.

Aufgabe 4. Zeichne die Punkte der Aufgabe 3 für den Fall, dass $\mathfrak{A}_2$ beliebig in die Zeichenebene gelegt wird.

II. Kapitel.

Darstellung der Geraden.

§ 12. Betrachtet man die Gerade als eine stetige Aufeinanderfolge von Punkten, so erhält man ihre Projektion durch die Projektionen aller ihrer Punkte. Da aber die projizierenden Lote sämtlicher Punkte der Geraden eine einzige Ebene bilden, welche auf der Tafel senkrecht steht, so ergibt sich die Projektion (Riss) einer Geraden als die Schnittlinie ihrer projizierenden Ebene (Lotebene) mit der Projektionsebene. Demnach entspricht einer Geraden im Raume im allgemeinen eine und nur eine Gerade der Tafel als ihr Riss.

Umgekehrt entsprechen einer Geraden der Tafel, als Riss genommen, alle möglichen Raumgeraden ihrer projizierenden Ebene oder: Eine Raumgerade ist durch ihren Riss in **einer** Tafel nicht bestimmt, es sind vielmehr auch hier, wie bei dem Punkte, zwei Risse in zwei sich schneidenden Tafeln erforderlich. Durch zwei solcher Risse ist in der That nur eine Raumgerade festgelegt, nämlich die Schnittlinie ihrer beiden projizierenden Ebenen.

Eine Gerade kann bezeichnet werden mit einem grossen lateinischen Buchstaben und ihre Risse mit demselben Buchstaben, welcher dann noch den Tafelzeiger als Zeiger erhält, z. B. Gerade A, oder Gerade A_1A_2 (Fig. 7), oder durch zwei beliebige ihrer Punkte z. B. Gerade ab, Gerade a_1b_1 , a_2b_2 . Bei Strecken wird man insbesondere die Endpunkte wählen.

§ 13. Die Gerade, welche auf einer der Tafeln senkrecht steht, projiziert sich in diese (§ 4) als ein Punkt, weil hier die projizierende Ebene in das projizierende Lot übergeht. Der zugeordnete Riss einer solchen Senkrechten (auch Lot genannt), bleibt eine Gerade (Fig. 8), welche auf der Achse, als der Schnittlinie der beiden Tafeln, senkrecht steht. Man kann sie weglassen, da

*) Die für die zusammenfallenden Tafeln allein genügende Achse ($\mathfrak{A}$) sollte nun richtiger mit $\mathfrak{A}_{1,2}$ (Achse eins zwei) bezeichnet werden. (Vergl. § 26.)

man in einem Punkte einer Ebene nur eine Senkrechte errichten kann.

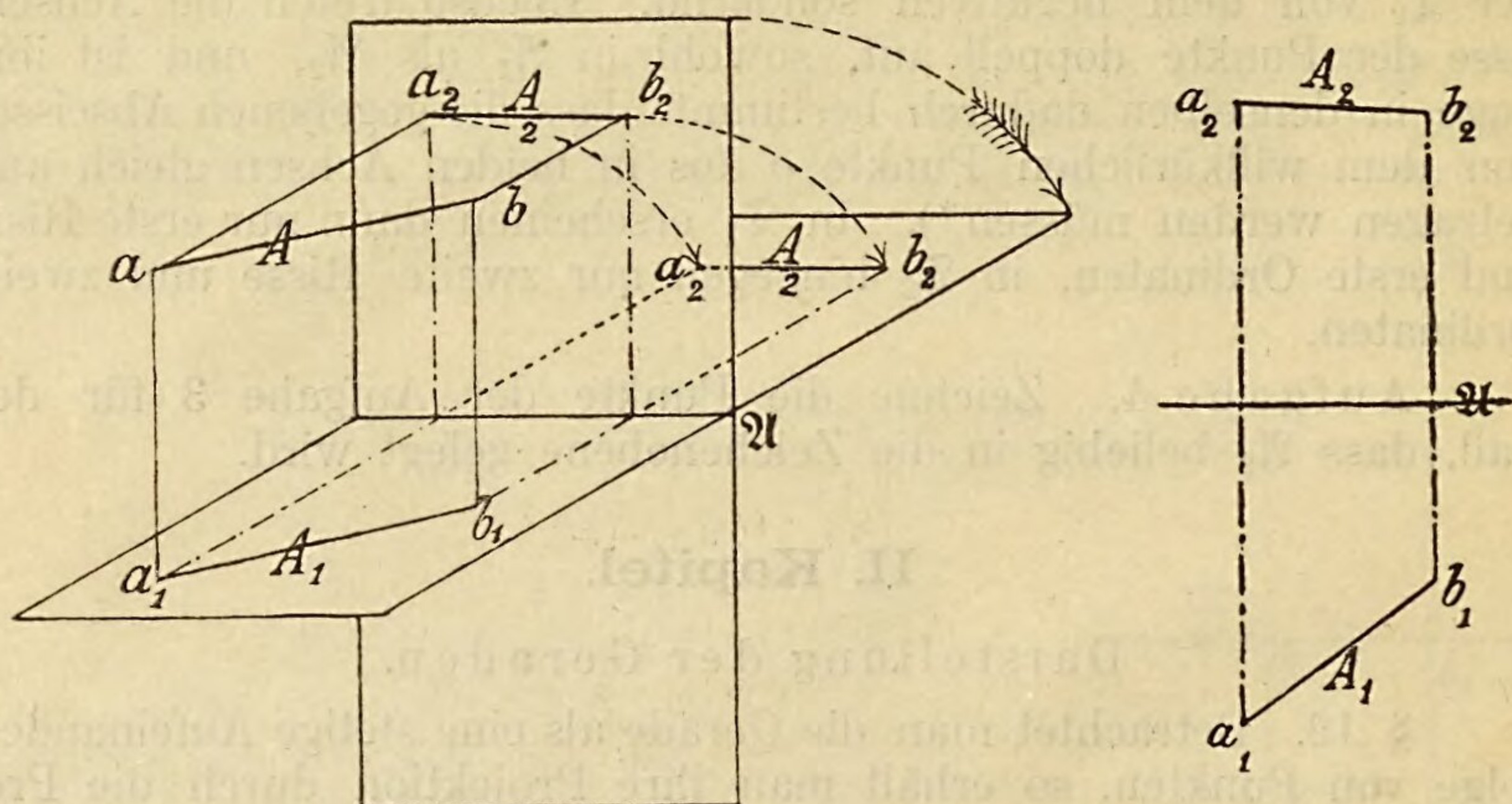


Fig. 7.

§ 14. Zwei beliebig in den Tafeln genommene Gerade können im allgemeinen als die Risse einer Raumgeraden gelten, weil die durch sie gelegten projizierenden Ebenen sich schneiden werden. Nur wenn beide Risse senkrecht zur Achse stehen ohne zusammenzufallen, oder wenn nur einer senkrecht zur Achse und der andere schief zu ihr ist, können sie eine Raumgerade nicht vorstellen. (Warum?)

Sind hingegen beide senkrecht zur Achse und fallen in eine einzige Gerade zusammen, so bilden auch ihre projizierenden Ebenen nur eine einzige auf beiden Tafeln senkrecht stehende Ebene, und jede Gerade derselben wird durch die gegebenen Risse dargestellt. Umgekehrt ist eine Gerade, welche einer zu beiden Tafeln senkrechten

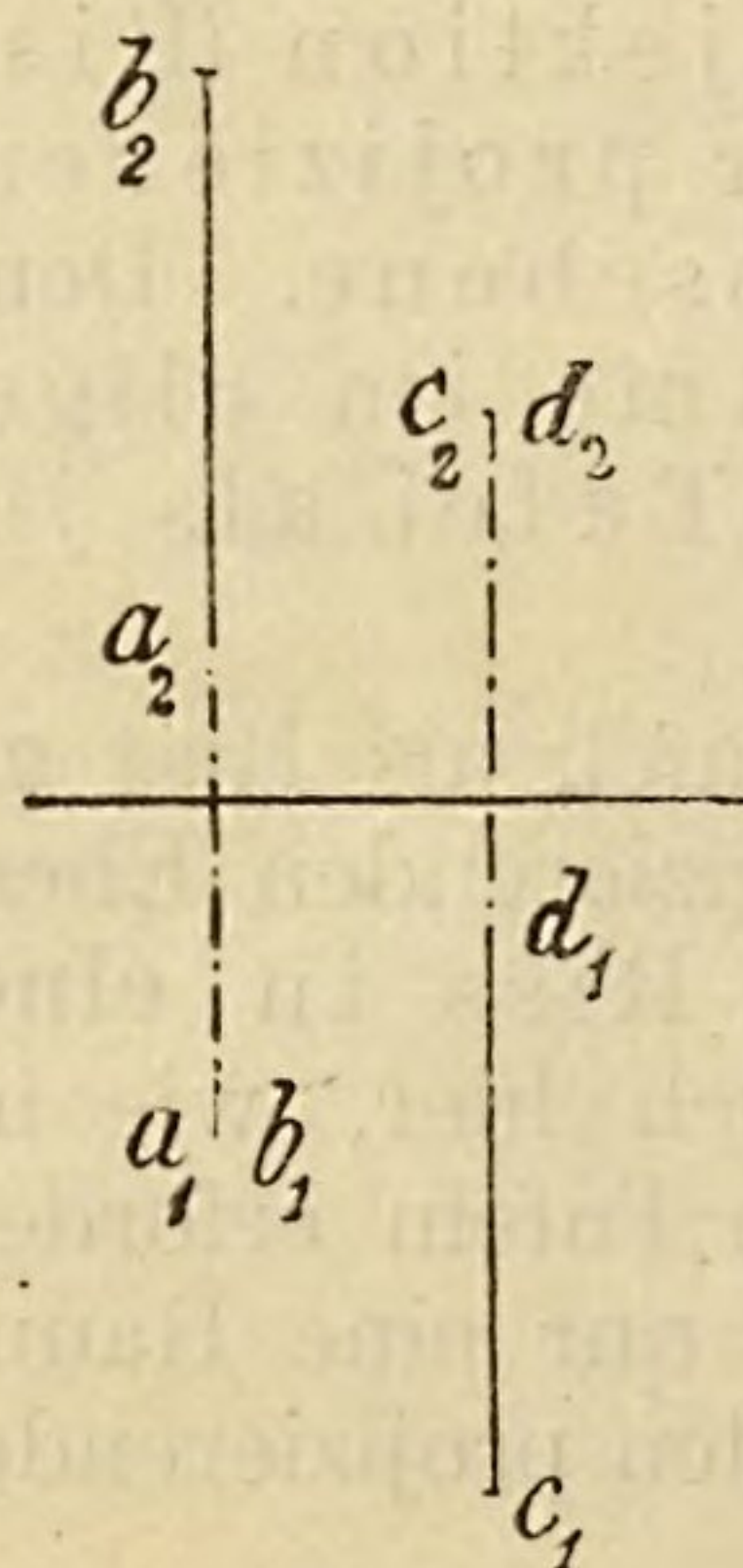


Fig. 8.

Ebene angehört, durch ihre Risse in diesen Tafeln nicht bestimmt, es wird zur völligen Bestimmung entweder die Angabe zweier ihrer Punkte oder der Riss in einer weiteren Tafel notwendig. Eine solche Gerade, welche die Achse senkrecht schneidet oder kreuzt, wollen wir in Zukunft „gelehnte Gerade“ nennen. (Vergl. § 26 u. f.)

§ 15. Es ist nun möglich jede Gerade durch ihre Risse zu zeichnen.

Aufgabe 5. Man stelle eine Gerade dar, welche 1) auf einer Tafel senkrecht steht, 2) in einer der Tafeln liegt, 3) einer Tafel parallel läuft, 4) der Achse parallel ist, 5) gegen beide Tafeln schief gerichtet, 6) gegen beide Tafeln gelehnt ist.

Anmerk. Die Resultate der vorstehenden Aufgabe bringe man in Sätze, welche zum späteren Gebrauche dem Gedächtnisse einzuprägen sind, z. B. wenn eine Gerade einer Tafel parallel läuft, so ist ihr zugeordneter Riss parallel zur Achse u. s. w.

Aufgabe 6. Eine Gerade darzustellen, welche der ersten Halbierebene des Systems angehört.

Die Risse aller Punkte dieser Halbierebene liegen symmetrisch zur Achse (haben von ihr jeweiligen gleiche Entfernung); das Gleiche gilt daher auch von den Rissen einer Geraden der Ebene d. h. die Risse einer solchen Geraden sind gegen die Achse gleich geneigt und schneiden dieselbe, ohne zusammen zu fallen, in einem Punkte (Gerade G_1 G_2 Fig. 9).

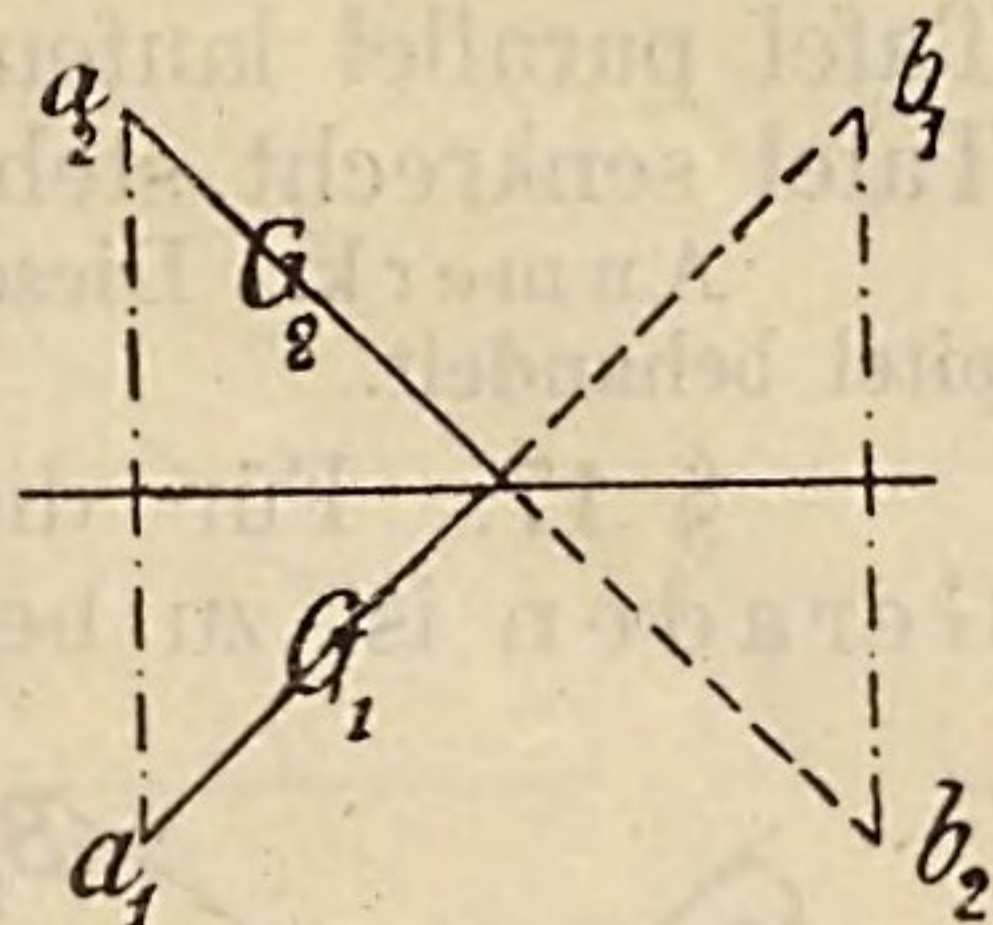


Fig. 9.

Aufgabe 7. Eine Gerade zu projizieren, welche in der II. Halbierebene des Systems liegt.

Die Risse aller Punkte dieser Halbierebene decken sich, mithin müssen auch die Risse aller Geraden dieser Ebenen zusammenfallen (Gerade G_1 G_2 Fig. 10).

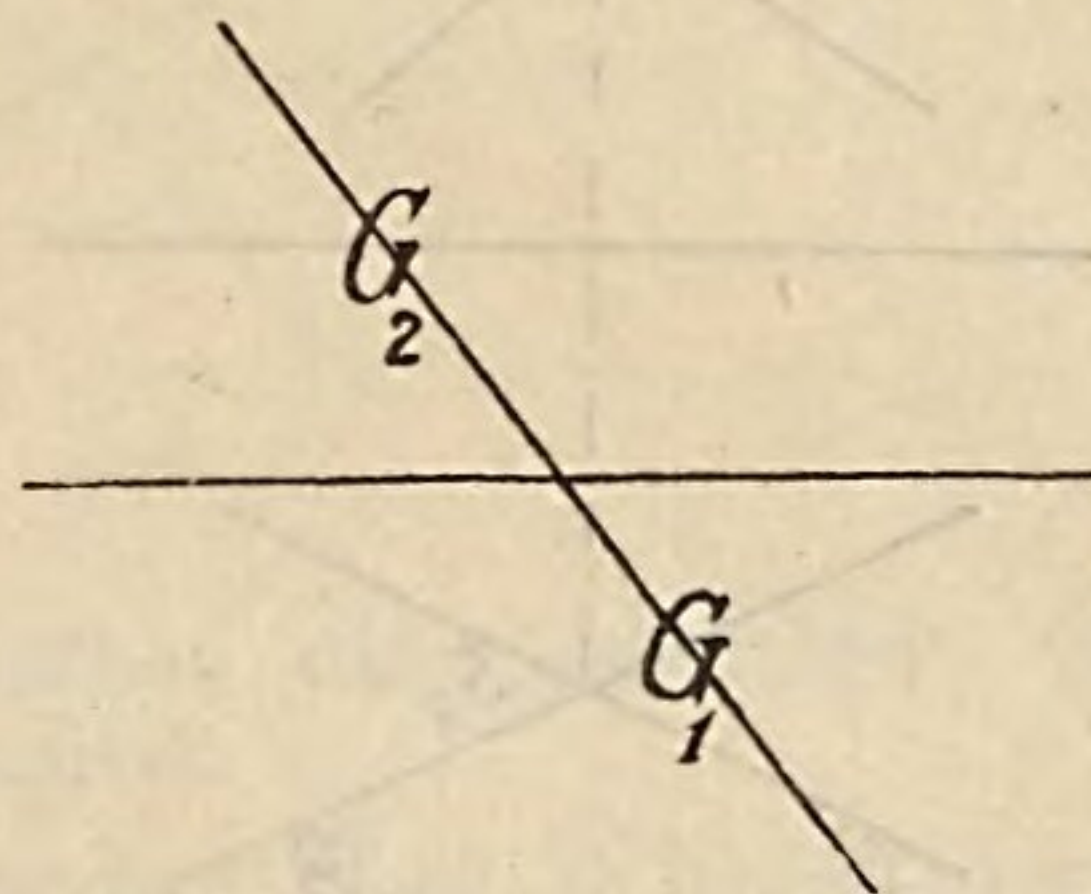


Fig. 10.

§ 16. Die Risse einer Geraden begreifen die Risse aller ihrer Punkte in sich, daher wird ein Punkt einer Geraden dann angehören, wenn seine Risse in die gleichnamigen Risse der Geraden fallen.

Von allen Punkten einer Geraden sind jene von besonderer Wichtigkeit, in welchen sie die beiden Tafeln durchdringt. Man nennt sie die Spuren der Geraden. Bedenkt man, dass sie als Punkte einer Geraden ihre Risse in den gleichnamigen Rissen der

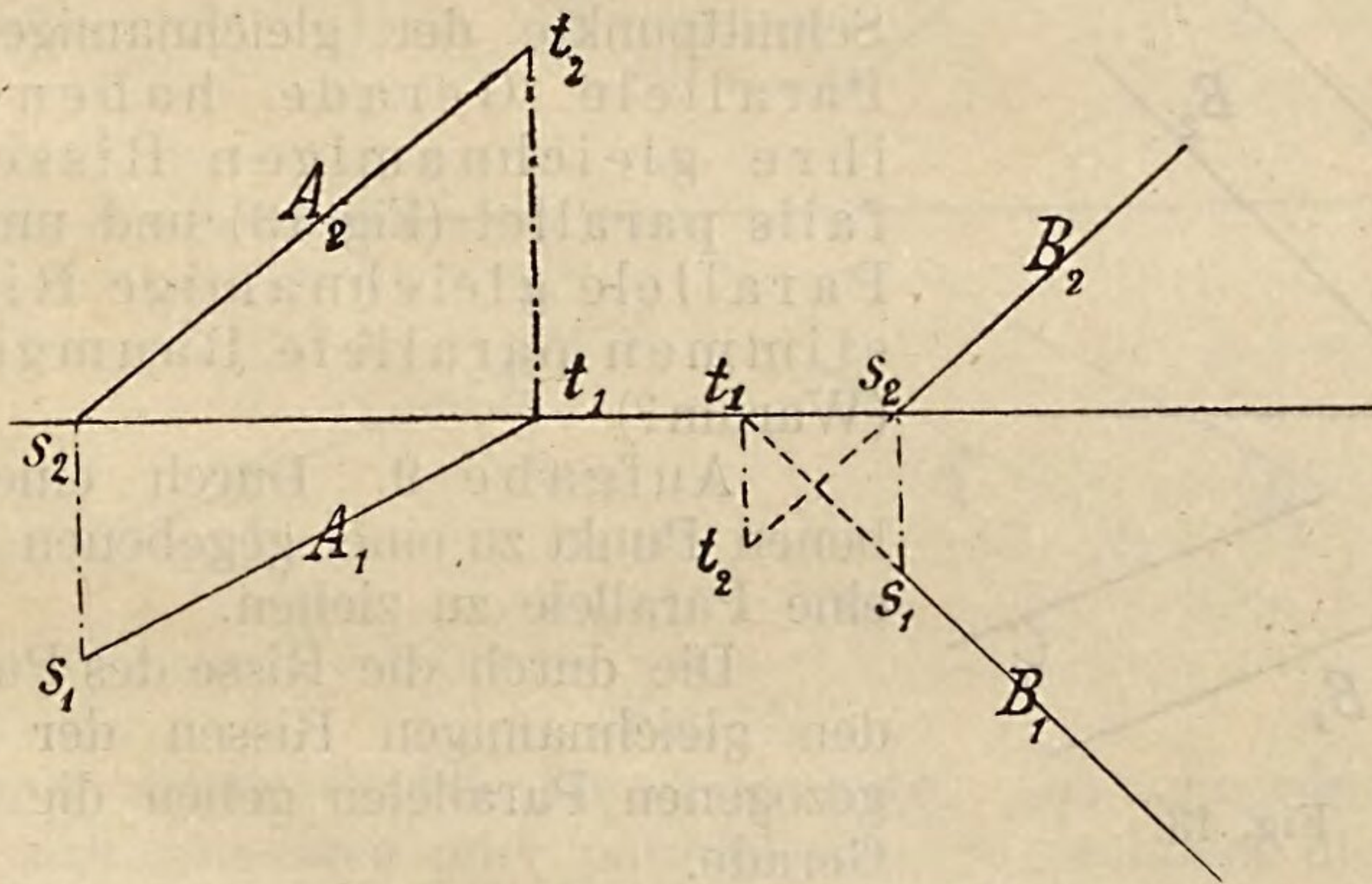


Fig. 11.

Geraden, und dass sie als Punkte einer Tafel ihre zugeordneten Risse in der Achse haben, so hat man zu ihrer Auffindung die Risse der Geraden jeweiligen bis zur Achse zu verlängern, und zu dem gefundenen Schnittpunkt den zugeordneten Riss zu suchen. In Fig. 11 sind s u. t die Spuren der Geraden A u. B .

Anmerk. Die Spuren bieten ein bequemes Mittel, um sich rasch eine Vorstellung von der Raumgeraden zu machen.

Aufgabe 8. Die Spuren von Geraden zu suchen, welche 1) in einer Tafel, 2) in den Halbierebenen H_I u. H_{II} liegen, 3) einer Tafel parallel laufen, 4) beiden Tafeln parallel sind, 5) auf einer Tafel senkrecht stehen.

Anmerk. Dieselbe Aufgabe über die „gelehnte“ Gerade wird im 4. Kapitel behandelt.

§ 17. Für die Darstellung zweier sich schneidenden Geraden ist zu beachten, dass die Risse des Schnittpunktes in

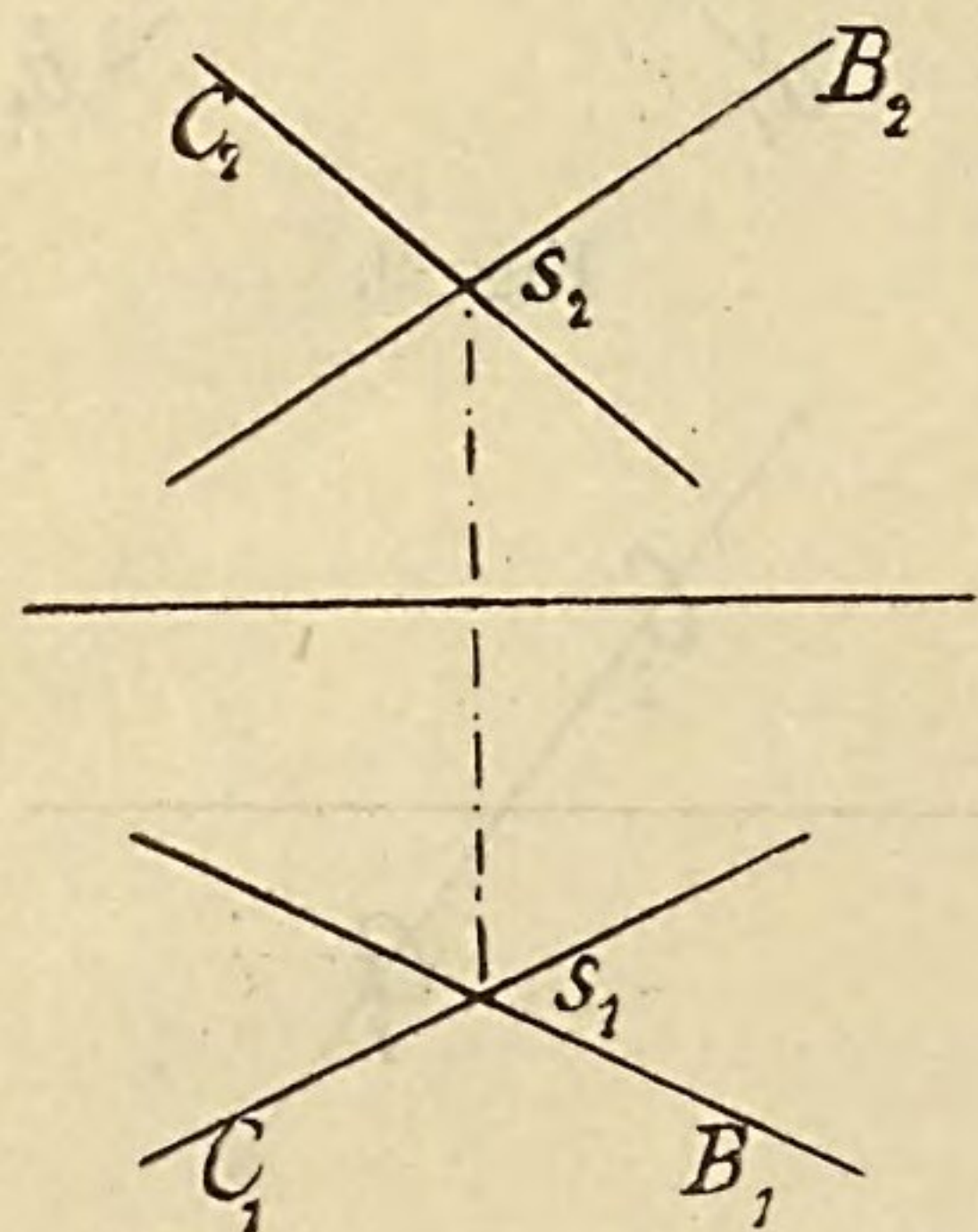


Fig. 12.

einem Achsenlot liegen und den gleichnamigen Rissen der Geraden angehören müssen. Die gleichnamigen Risse sich schneidender Geraden schneiden sich daher ebenfalls und zwar in Punkten eines Achsenlotes (Fig. 12). Umgekehrt: Schneiden sich die gleichnamigen Risse von Geraden in Punkten eines Achsenlotes, so schneiden sich auch die Raumgeraden in diesem Punkte. (Warum?)

Übungsaufgaben: 1) Gerade zu zeichnen, welche sich in einem Punkte der I. oder II. Halbierebene schneiden.

2) Durch einen gegebenen Punkt Gerade zu legen, welche eine gegebene Gerade schneiden.

§ 18. Rückt der Schnittpunkt zweier Raumgeraden in's Unendliche, so geschieht dies auch mit dem

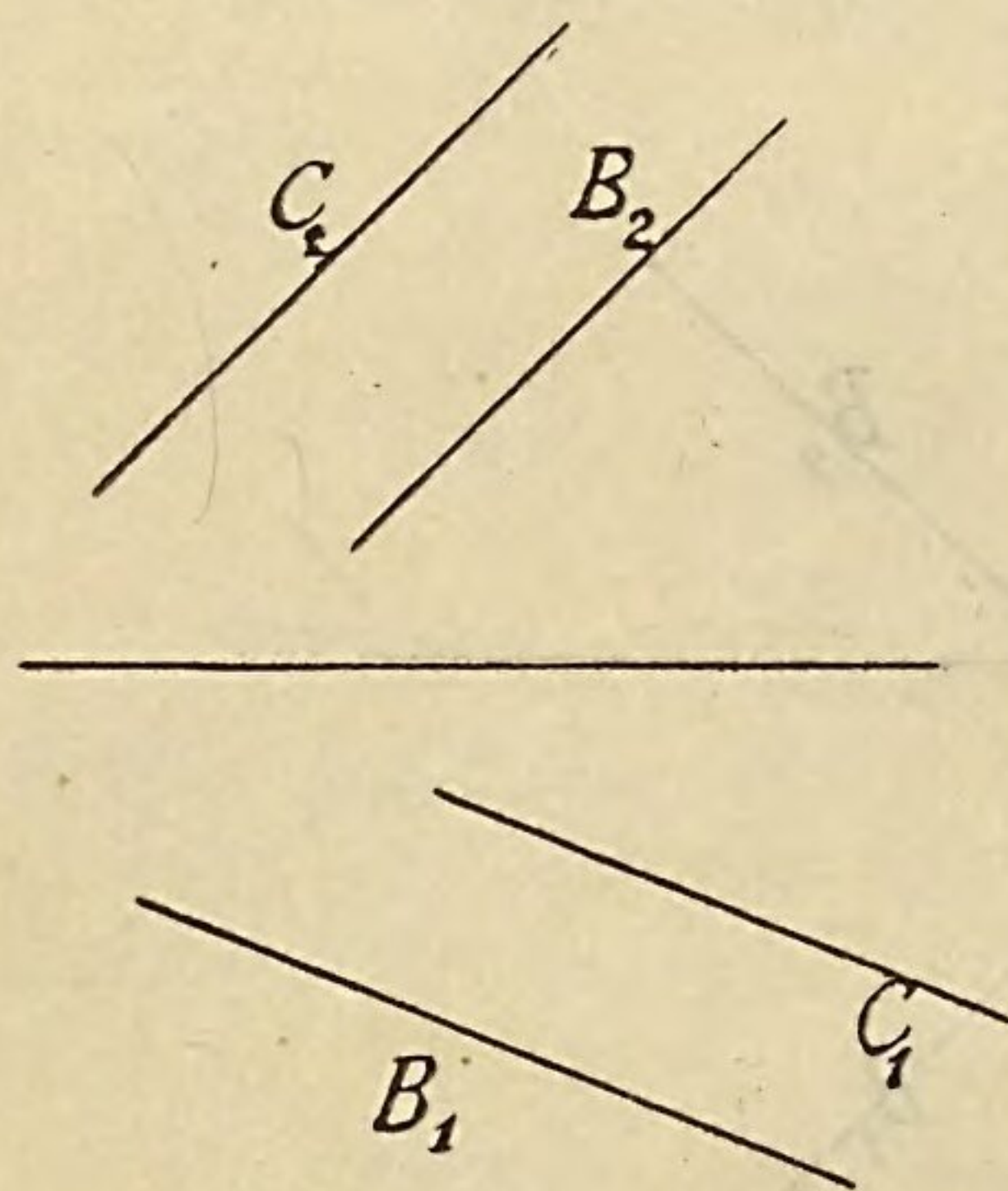


Fig. 13.

Schnittpunkte der gleichnamigen Risse. Parallele Gerade haben daher ihre gleichnamigen Risse ebenfalls parallel (Fig. 13) und umgekehrt: Parallele gleichnamige Risse bestimmen parallele Raumgeraden. (Warum?)

Aufgabe 9. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen.

Die durch die Risse des Punktes zu den gleichnamigen Rissen der Geraden gezogenen Parallelen geben die gesuchte Gerade.

§ 19. Sich kreuzende oder windschiefe Gerade haben keinen (weder endlichen noch unendlichen) Punkt gemeinsam, also auch ihre Risse nicht. Die gleichnamigen Risse windschiefer Geraden können sich daher schneiden, aber nicht in Punkten eines Achsenlotes, oder das eine Paar der Risse kann sich schneiden, das andere zu einander parallel sein. (Fig. 14.) Umgekehrt: Haben die gleichnamigen

Risse von Geraden keine Punkte gemeinsam, welche in einem Achsenlot liegen, so stellen sie windschiefe Gerade dar. (Warum?)

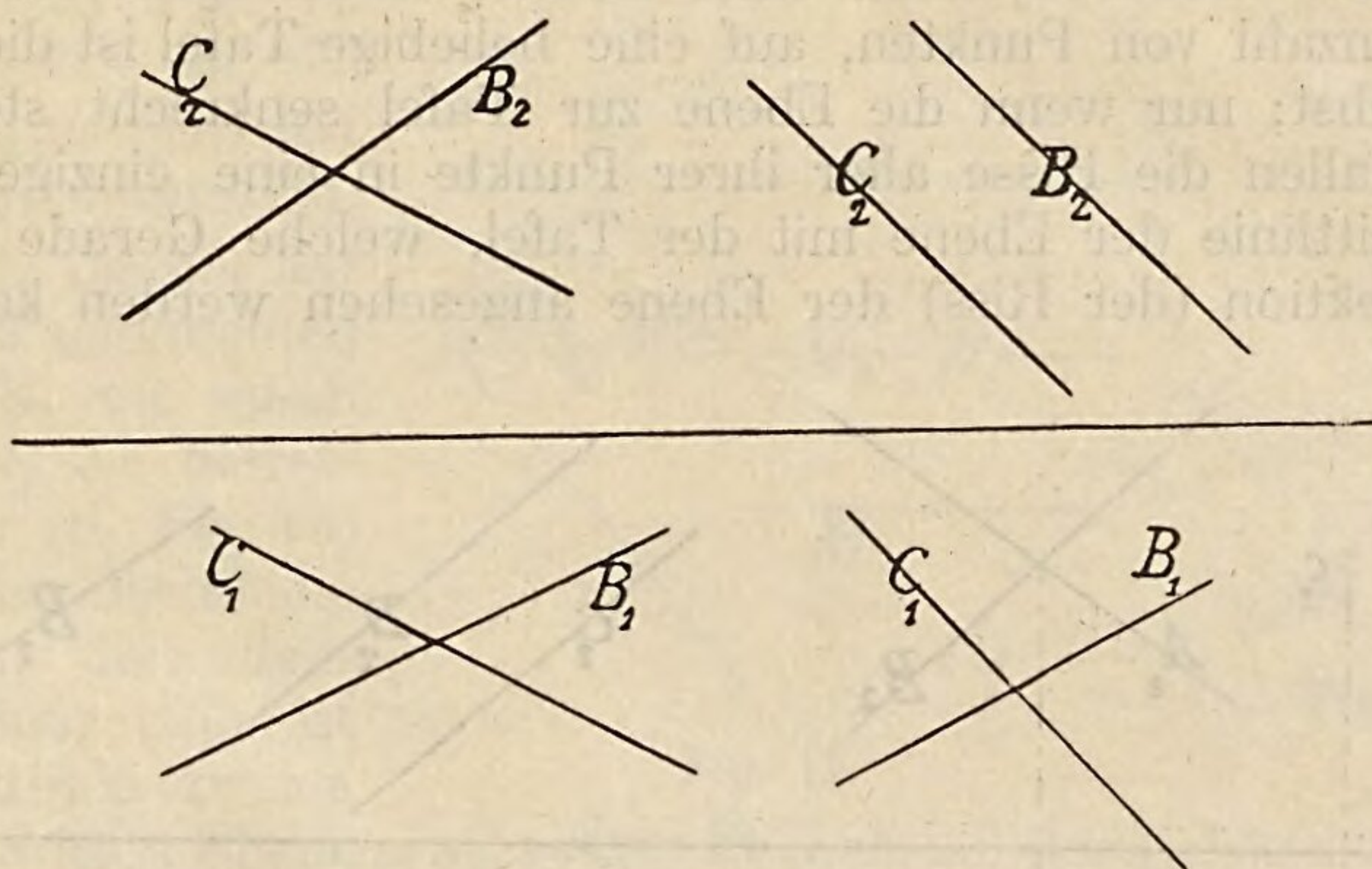


Fig. 14.

Anmerk. Von den vorstehenden Sätzen machen die „gelehnten“ Geraden eine Ausnahme; näheres hierüber im IV. Kapitel.

§ 20. Gerade, welche einer projizierenden (Lot-)Ebene angehören, haben die Risse in der gleichnamigen Tafel gemeinsam;

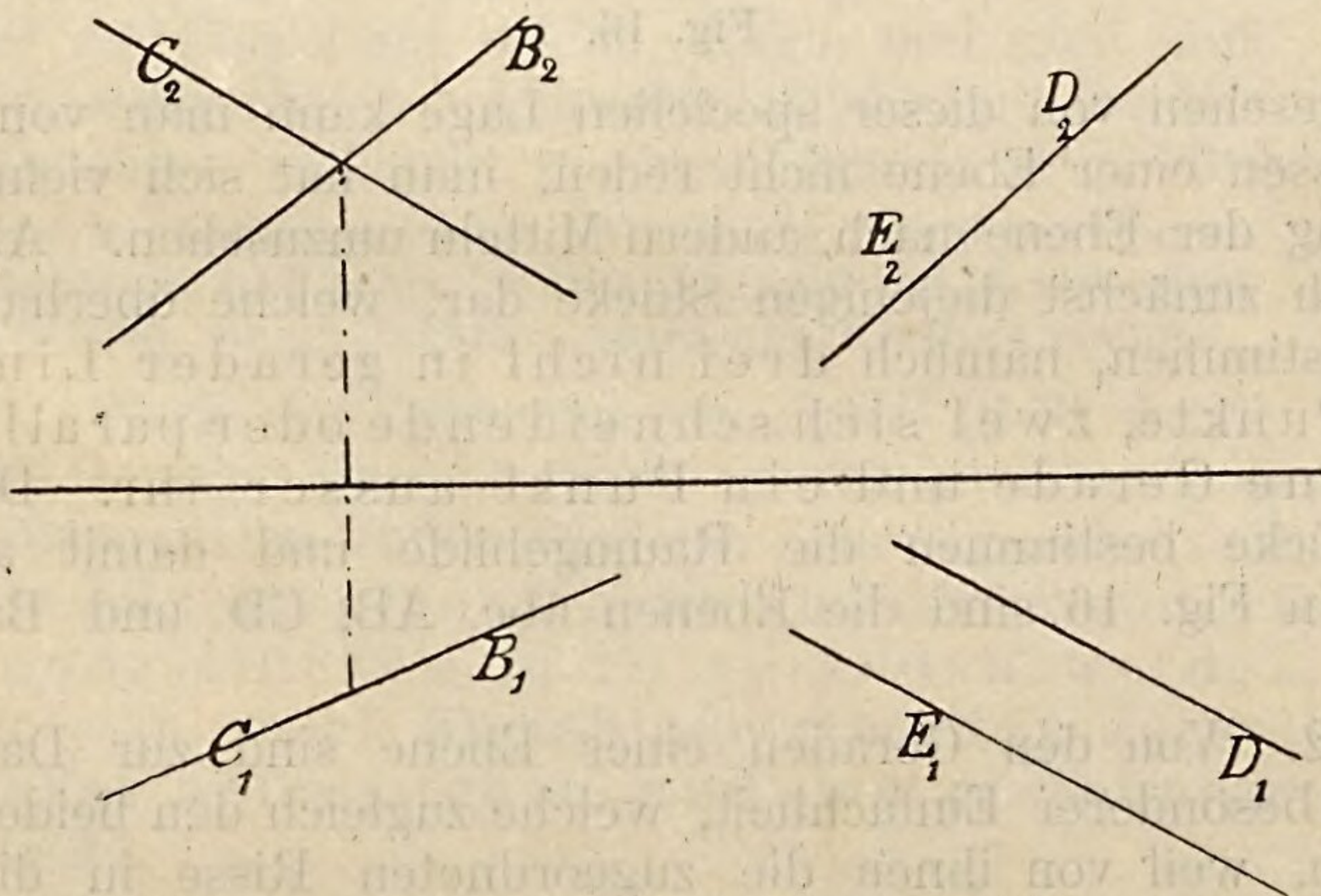


Fig. 15.

wir nennen solche Gerade Deckgerade. Die zugeordneten Risse werden sich schneiden oder parallel sein, je nachdem die Geraden selbst sich schneiden oder parallel sind und umgekehrt. In Fig. 15 sind B u. C zwei sich schneidende erste, D u. E zwei parallele zweite Deckgerade.

Übungsaufgaben: 1) Durch einen Punkt der H_I zwei sich schneidende erste oder zweite Deckgerade zu legen.

2) Zu einer gegebenen Geraden eine beliebige erste oder zweite Deckgerade zu konstruieren.

3) Zu einer gegebenen Geraden eine Deckgerade zu finden, welche in einer der Halbierebenen liegt.

III. Kapitel.

Darstellung der Ebene.

§ 21. Die Projektion einer Ebene, als Inbegriff einer unendlichen Anzahl von Punkten, auf eine beliebige Tafel ist diese ganze Tafel selbst; nur wenn die Ebene zur Tafel senkrecht steht (Lotebene), fallen die Risse aller ihrer Punkte in eine einzige Gerade, die Schnittlinie der Ebene mit der Tafel, welche Gerade dann als die Projektion (der Riss) der Ebene angesehen werden kann.

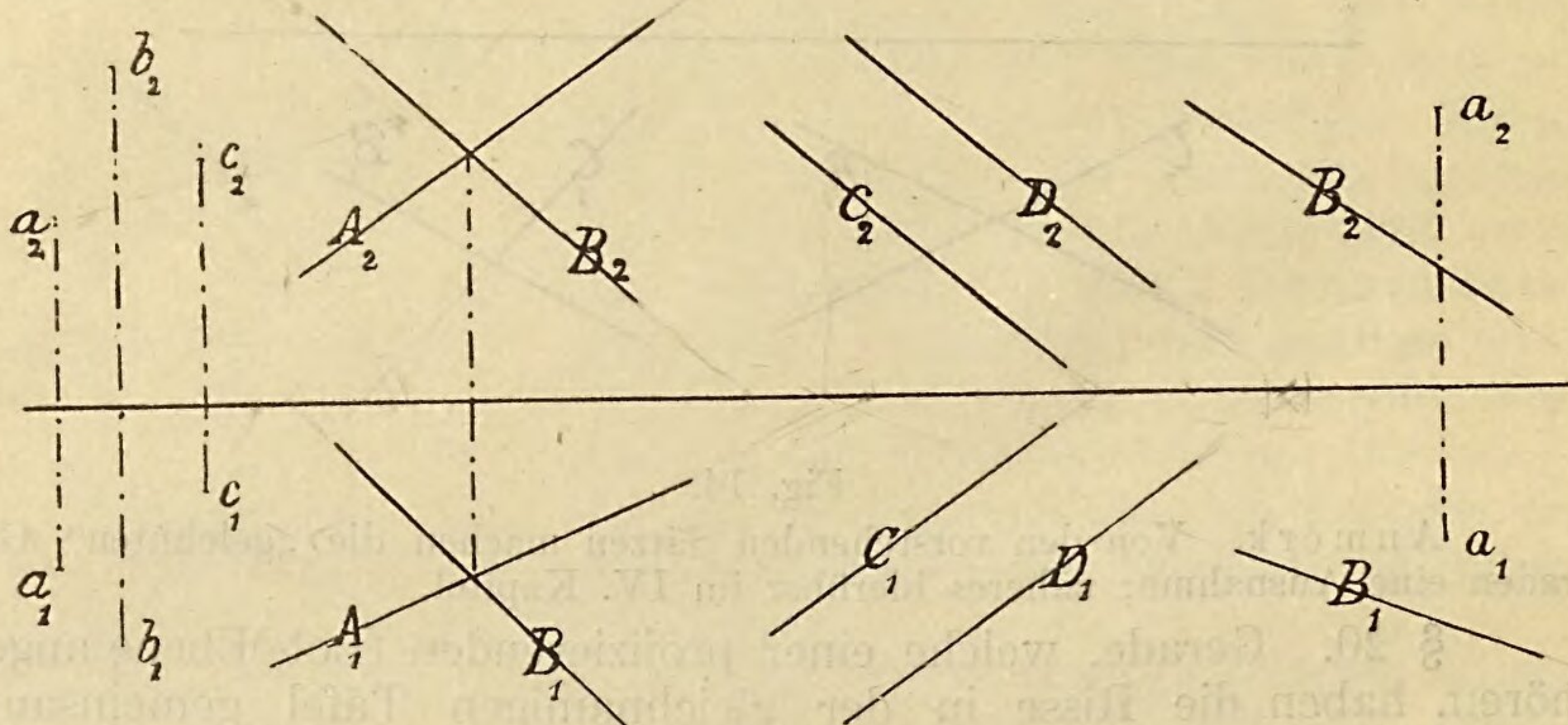


Fig. 16.

Abgesehen von dieser speciellen Lage kann man von brauchbaren Rissen einer Ebene nicht reden, man hat sich vielmehr zur Darstellung der Ebene nach andern Mitteln umzusehen. Als solche bieten sich zunächst diejenigen Stücke dar, welche überhaupt eine Ebene bestimmen, nämlich drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, zwei sich schneidende oder parallele Gerade, eine Gerade und ein Punkt ausser ihr. Die Risse dieser Stücke bestimmen die Raumgebilde und damit auch die Ebene. In Fig. 16 sind die Ebenen abc , AB , CD und Ba dargestellt.

§ 22. Von den Geraden einer Ebene sind zur Darstellung jene von besonderer Einfachheit, welche zugleich den beiden Tafeln angehören, weil von ihnen die zugeordneten Risse in die Achse fallen, daher nicht speciell gezeichnet werden müssen. Diese Geraden, die Schnittlinien der Ebene mit den Tafeln, nennt man die Spuren der Ebene. Ihre Benützung zur Darstellung der Ebene gewährt ausser der Einfachheit auch noch den Vorteil, dass man (§ 16, Anm.) aus ihnen am leichtesten auf die räumliche Lage der Ebene schliessen kann.

Eine Ebene, die nicht etwa durch die Achse selbst geht, wird diese entweder in einem Punkte schneiden oder ihr parallel laufen. Im ersten Falle müssen auch, da jeder Punkt der Achse mit seinen Projektionen zusammenfällt, beide Spuren der Ebene durch diesen einen Punkt der Achse gehen, im zweiten werden sie beide der

Achse parallel sein. Die Spuren einer Ebene müssen sich daher stets in einem Punkte der Achse schneiden oder beide ihr parallel laufen. In Fig. 17 sind die Ebenen ST (auch S_1T_2 gelesen) und MN (M_1N_2) dargestellt.

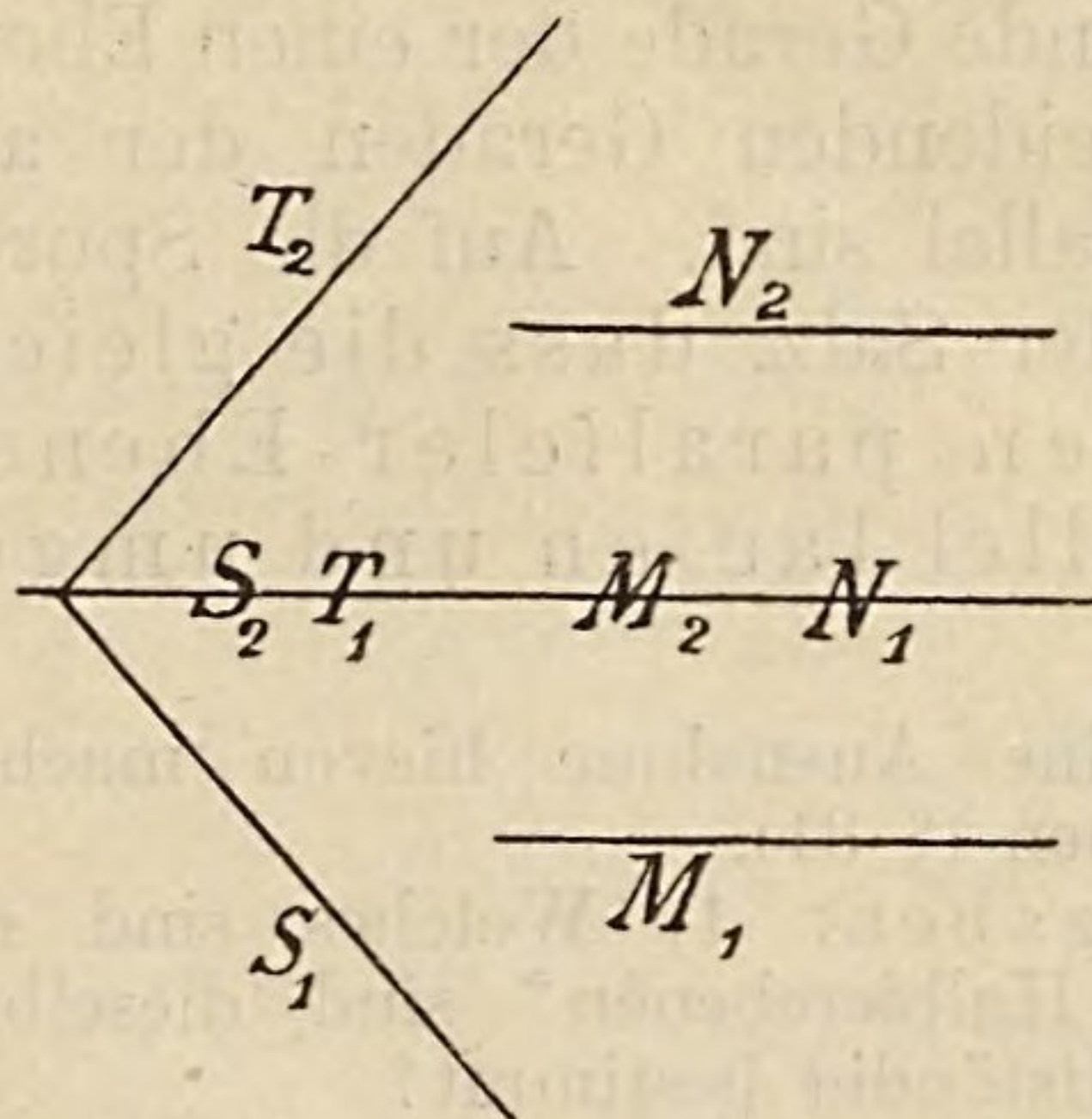


Fig. 17.

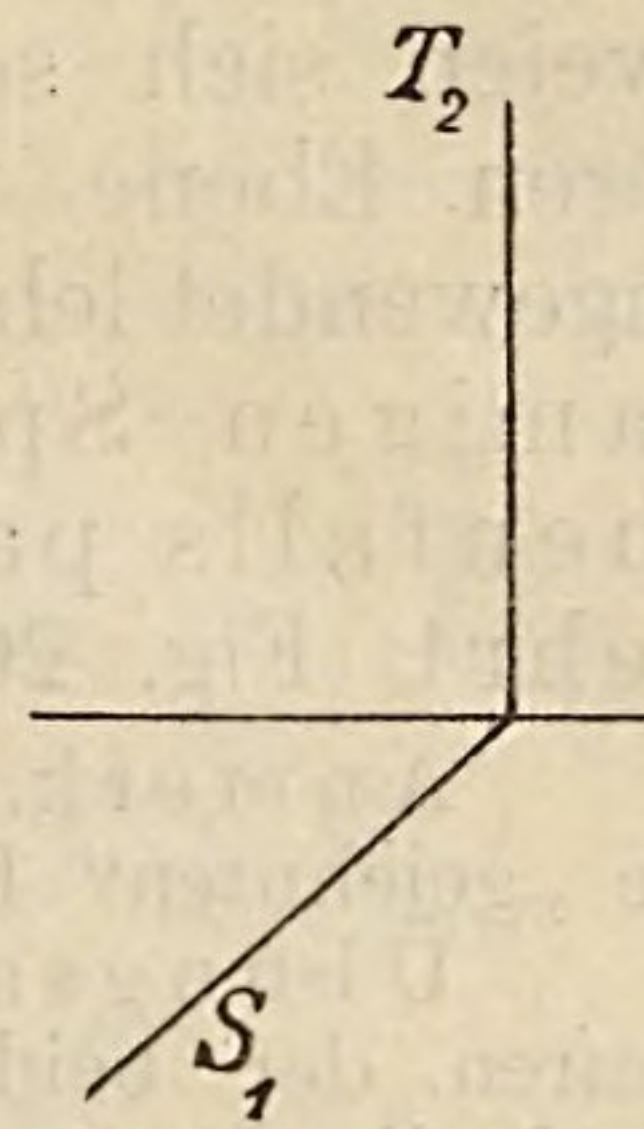


Fig. 18.

§ 23. Bei der auf einer Tafel senkrechten Ebene fällt, wie schon angedeutet, die betreffende Spur (S_1 Fig. 18) mit dem Riss der Ebene zusammen, die zugeordnete Spur (T_2) ist als Schnittlinie zweier

auf einer dritten Ebene senkrechter Ebenen auf der Achse senkrecht; sie kann übrigens, da eine solche projizierende Ebene durch ihren Riss schon vollständig bestimmt ist, auch weggelassen werden.

Läuft die Ebene einer Tafel parallel, so liegt ihre gleichnamige Spur im Unendlichen, ihre zugeordnete Spur muss folglich (§ 22) zur Achse parallel sein, z. B. die Ebene M, oder die Ebene N der Fig. 17.)

Steht die Ebene auf beiden Tafeln und somit auf der Achse senkrecht, so schneiden auch ihre beiden Spuren die Achse senkrecht in einem Punkte (Fig. 19).

Anmerk. Diejenige Ebene (MN in Fig. 17), deren Spuren beide zur Achse parallel gehen, welche demnach der Achse selbst parallel ist, wollen wir in Zukunft „gelehnte Ebene“ nennen.

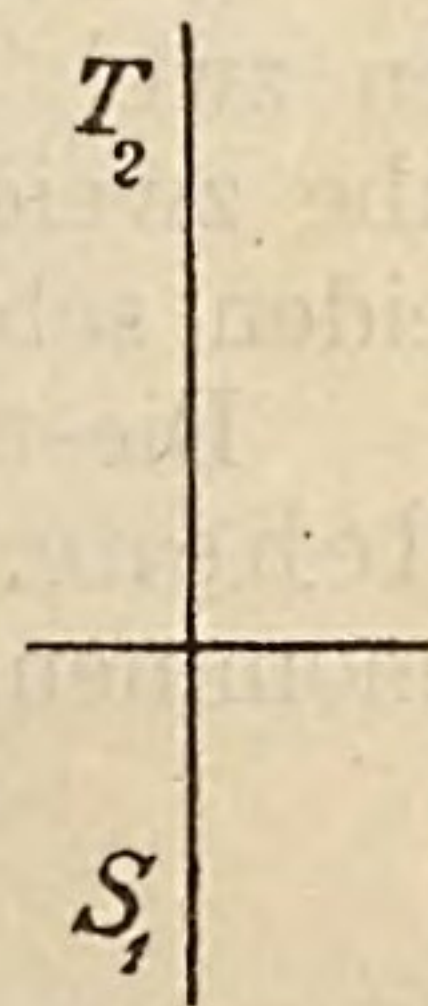


Fig. 19.

§ 24. Nach der Erklärung von „Spur“ (§ 16, § 22) müssen alle Geraden einer Ebene die Spuren derselben in ihren gleichnamigen Spurpunkten treffen oder den Spuren parallel sein. Sollen daher die Spuren einer Ebene aus ihren anderweitigen Bestimmungsstücken (§ 21) gefunden werden, so hat man nur von zwei beliebigen Geraden derselben die Spurpunkte aufzusuchen und die gleichnamigen zu verbinden.

Aufgabe 10. Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche 1) durch zwei Gerade, 2) durch 3 Punkte, 3) durch eine Gerade und einen Punkt gegeben ist.

Beispiele: 1) Gerade A gehe durch Punkt a (0, 2, 3) und Gerade B durch Punkt b (0, 3, 1) der Achse parallel; 2) Gerade A gehe durch Punkt o (0, 0, 0) und Punkt a (2, 3, 4), B durch Punkt 0 (0, 0, 0) u. Punkt b (2, 4, 3); 3) die Ebene abc enthalte die Punkte a (2, 3, 1), b (4, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$), c ($5\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 4); 4) die Punkte a (2, 2, 3), b (3, 3, 5), c (4, 3, 4); 5) die Punkte a (0, 2, 0), b (2, 0, 3), c (4, 1, $1\frac{1}{2}$); 6) die Ebene Ba enthalte den Punkt a (0, 1, 2) u. die Gerade $B=\mathfrak{T}_1$; 7) den Punkt a (2, 2, 1) u. Gerade

$B \perp \mathfrak{T}_2$; 8) die Ebene sei der Achse parallel und enthalte die Punkte $a_1 (0, -3)$ und $b_2 (0, -3)$ oder 9) die Punkte $a_1 (0, -2)$, $b_2 (0, 2)$.

§ 25. Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende Gerade der einen Ebene zweien sich schneidenden Geraden der anderen Ebene parallel sind. Auf die Spuren angewendet lehrt der Satz, dass die gleichnamigen Spuren paralleler Ebenen ebenfalls parallel laufen und umgekehrt (Fig. 20).

Anmerk. Eine Ausnahme hievon machen die „gelehnten“ Ebenen (§ 31).

Übungsaufgaben: 1) Welches sind die Spuren der beiden Halbierebenen? sind dieselben durch die Spuren vollständig bestimmt?

2) Wie verlaufen die Spuren der den Halbierebenen parallelen Ebenen?

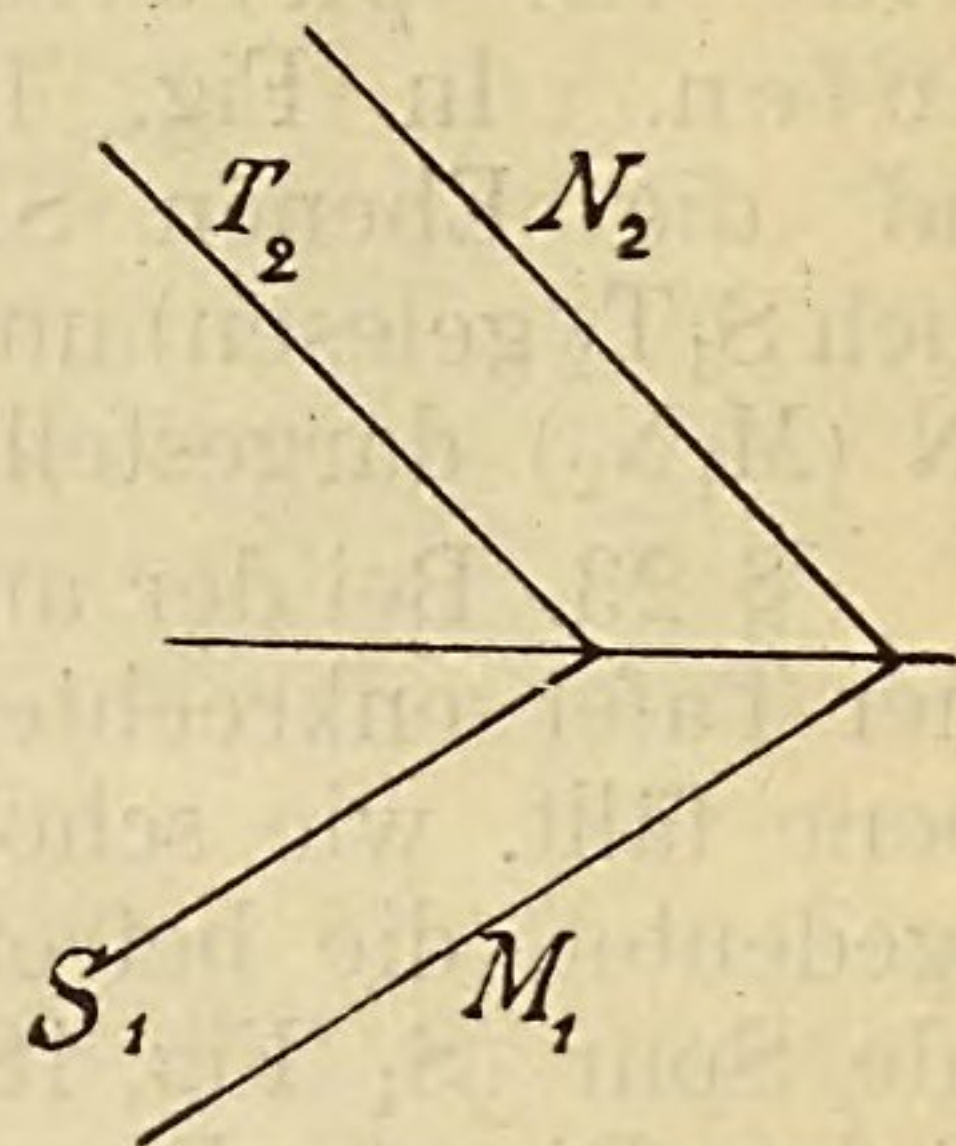


Fig. 20.

IV. Kapitel.

Die gelehnte Gerade.

§ 28. Eine gelehnte Gerade ist (§ 14) durch ihre Risse in den zwei Tafeln nicht bestimmt; es bedarf dazu entweder der Angabe zweier Punkte oder der Projektion auf eine dritte, die ersten beiden schneidenden, Ebene.

Diese dritte Ebene, Seitenebene, Kreuzrissebene, Profilebene, von uns kurz dritte Tafel ($\mathfrak{T}_3$) genannt, wird so angenommen, dass sie sowohl auf $\mathfrak{T}_1$ als $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht. Ihre

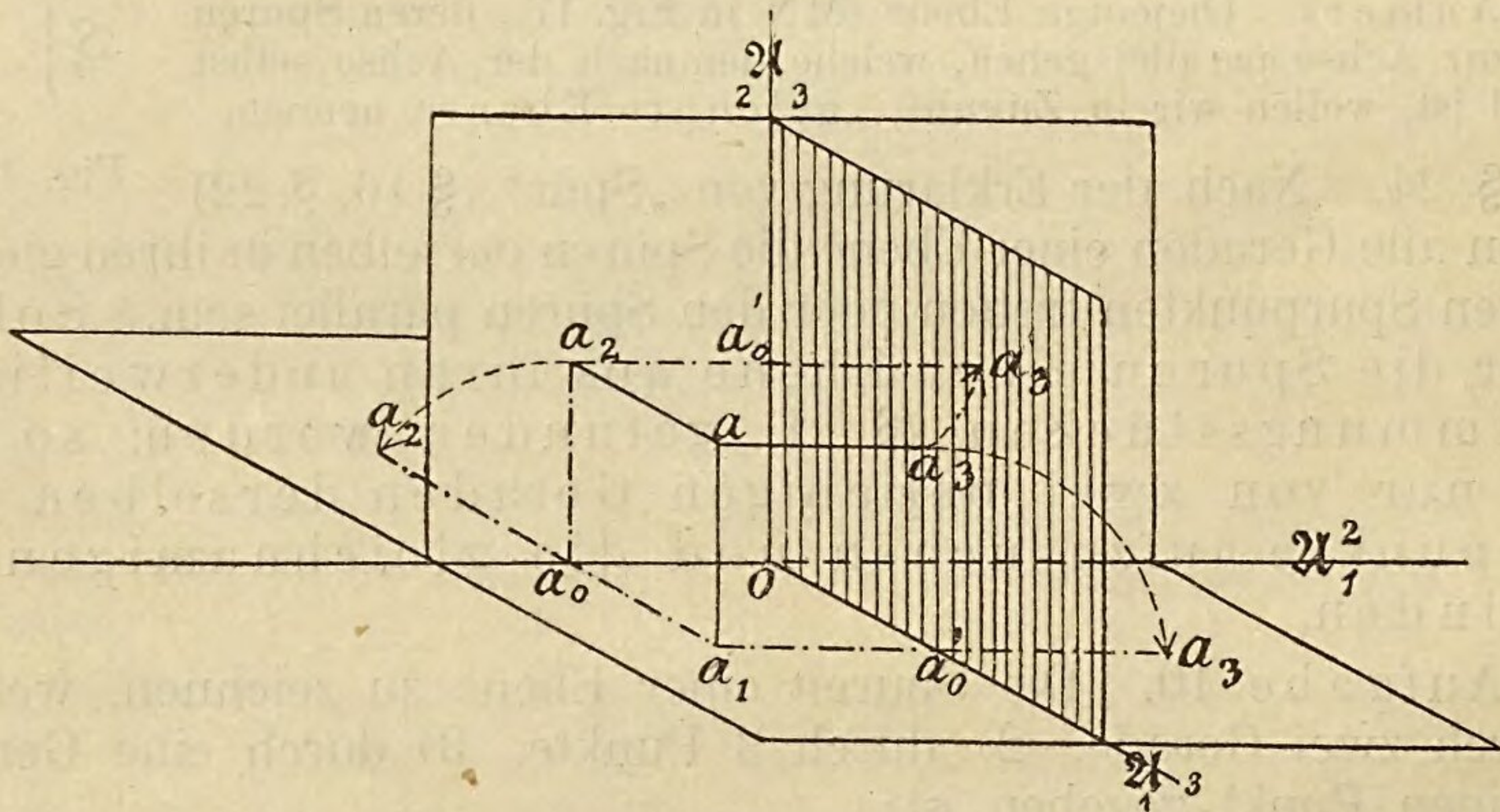


Fig. 21.

Schnittlinien mit beiden Tafeln stehen dann (§ 23) auf der Achse ($\mathfrak{N}_{12}$ Fig. 21) ebenfalls senkrecht und fallen nach der Umklappung der $\mathfrak{T}_2$ in $\mathfrak{T}_1$ in eine einzige Gerade.

Die $\mathfrak{T}_3$ kann mit $\mathfrak{T}_1$ zu einem neuen rechtwinkligen Tafelsystem $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ verbunden werden, ebenso aber auch mit $\mathfrak{T}_2$ zu dem rechtwinkligen System $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$. Die Achse

im ersteren System (Fig. 21) ist die Schnittlinie der $\mathcal{T}_3$ mit $\mathcal{T}_1$ ($\mathcal{A}_{13}$, Achse eins drei), im zweiten System die Schnittlinie der $\mathcal{T}_3$ und $\mathcal{T}_2$ ($\mathcal{A}_{23}$). *)

In jedem rechtwinkligen Tafelsystem gelten die in § 5 für das System $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ aufgestellten Sätze unverändert, weil sie dort unabhängig von der Lage des Systems im Raume entwickelt wurden. Insbesondere liegen die zugeordneten Risse eines Punktes stets in einem Achsenlot, und jede Ordinate eines Punktes ist immer, der Grösse und dem Vorzeichen nach, dem Abstand des Punktes von der zugeordneten Tafel gleich. Beispielsweise ist im System $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3$ die dritte Ordinate dem ersten, im System $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3$ die dritte Ordinate dem zweiten Abstand gleich.

Die Abstände eines Punktes von den Tafeln sind in seinen Ordinaten (§ 5) gegeben; man kann daher ohne Anstand jeden Punkt, dessen Risse in $\mathcal{T}_1$ u. $\mathcal{T}_2$ bekannt sind, in das neue System $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3$ oder $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3$ übertragen. In Fig. 22 ist dies für die Punkte a, b, c im System $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3$ durchgeführt. Als Achse des neuen Systems ist die beliebige, aber zu $\mathcal{A}_{12}$ ($\mathcal{A}$) senkrechte Gerade $\mathcal{A}_{13}$ angenommen. Die ersten Risse der Punkte bleiben, da $\mathcal{T}_1$ auch in's neue System übergegangen ist, unverändert, die Senkrechten aus a_1 , b_1 , c_1 auf $\mathcal{A}_{13}$ sind die Achsenlote des neuen Systems, a_0' , b_0' , c_0' **) die neuen Achsenrisse, a_1a_0' , b_1b_0' , c_1c_0' die neuen ersten Ordinaten (O_1' Ordinate eins mit Strich), $a_0'a_3 = a_0a_2$, $b_0'b_3 = b_0b_2$, $c_0'c_3 = c_0c_2$ die dritten Ordinaten, und damit a_3 , b_3 , c_3 gefunden.

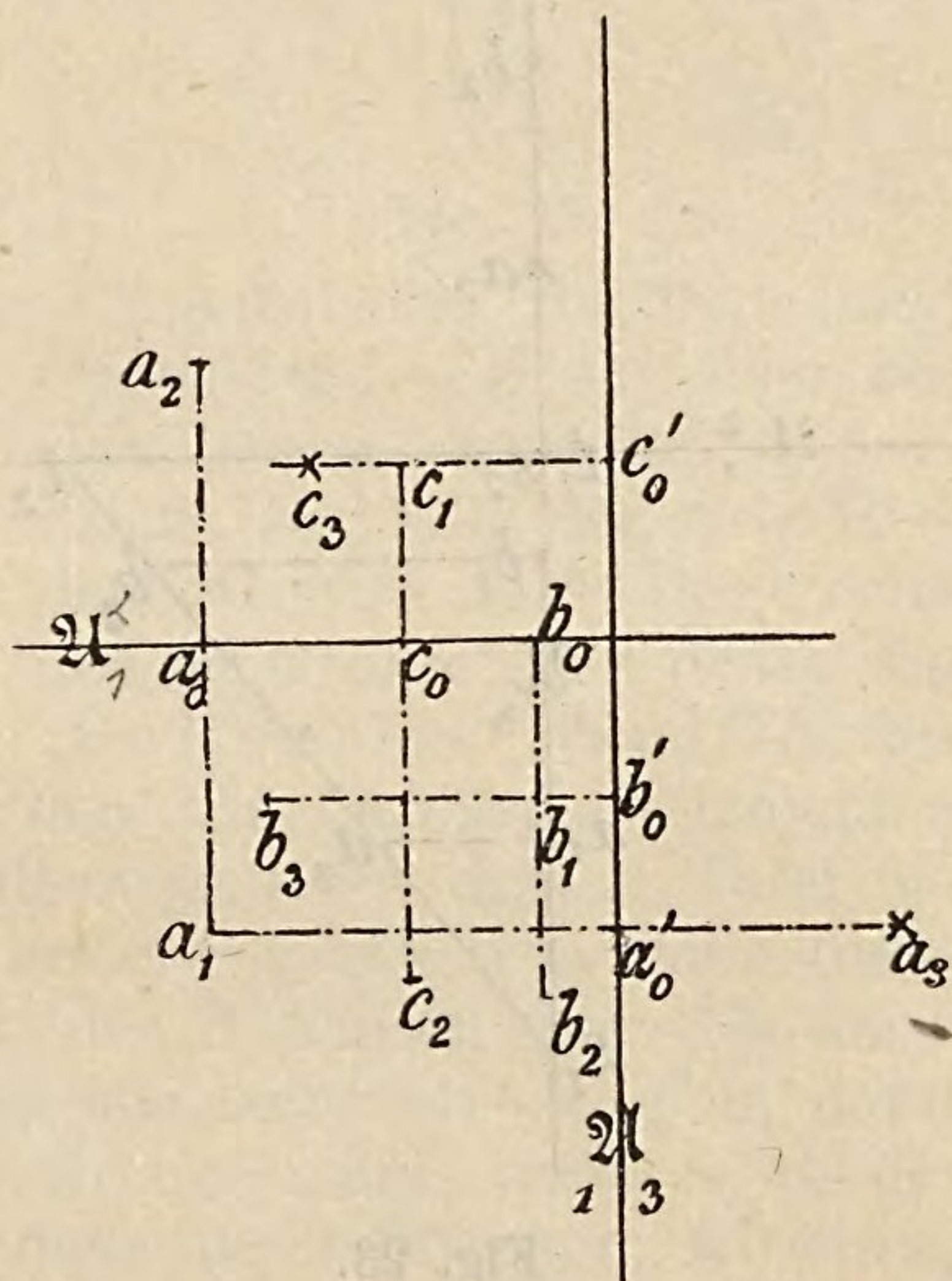


Fig. 22.

Man beachte: Die dritte Ordinate ist gleich dem ersten Abstand, welche hinwieder in der zweiten Ordinate ausgedrückt ist, oder: Im rechtwinkligen System $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3$ ist $O_3 = O_2$, und im rechtwinkligen System $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3$ ist $O_3 = O_1$, sowohl der Grösse als dem Vorzeichen nach.

Anmerk. Wie man zu verfahren hat, um umgekehrt einen bekannten Punkt des Systems $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3$ in das System $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ zurückzuführen, ist aus dem Vorhergehenden leicht erkennbar.

Übungsaufgaben: 1) Man projiziere die Punkte der Aufgabe 3 in das System $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3$.

*) Der Vorteil der eben angewendeten Bezeichnung für die Achse irgend eines Systems leuchtet von selbst ein; er wird noch grösser, wenn man, wie dies in Zukunft immer geschehen soll, durch die Stellung der Zeiger 1 u. 2, 1 u. 3 u. s. w. zugleich die betreffende positive Tafel kennzeichnet.

**) Die korrektere Bezeichnung a_{13} , b_{13} , c_{13} u. s. w. ist wohl zu umständlich.

2) Von einer gelehnten Geraden, welche durch 2 ihrer Punkte im System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ gegeben ist, den dritten oder Seitenriss herzustellen.

3) Auf einer gelehnten Geraden, welche durch ihre drei Risse gegeben ist, einen beliebigen Punkt anzugeben.

4) Man konstruiere für Ebenen, welche durch ihre erste und zweite Spur gegeben sind, auch die dritten Spuren.

§ 27. Ist eine Gerade im System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ gelehnt, mithin der Seitenebene parallel, so ist sie es im System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ oder $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$ nicht mehr. Diejenigen Aufgaben über die gelehnte Gerade, welche bisher im System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ nicht zu lösen waren, können daher nach dem allgemeinen Verfahren gelöst werden, wenn die Gerade in eines der beiden andern Systeme übertragen wird.

Aufgabe 11. Die Spuren einer gelehnten Geraden (ab) zu finden.

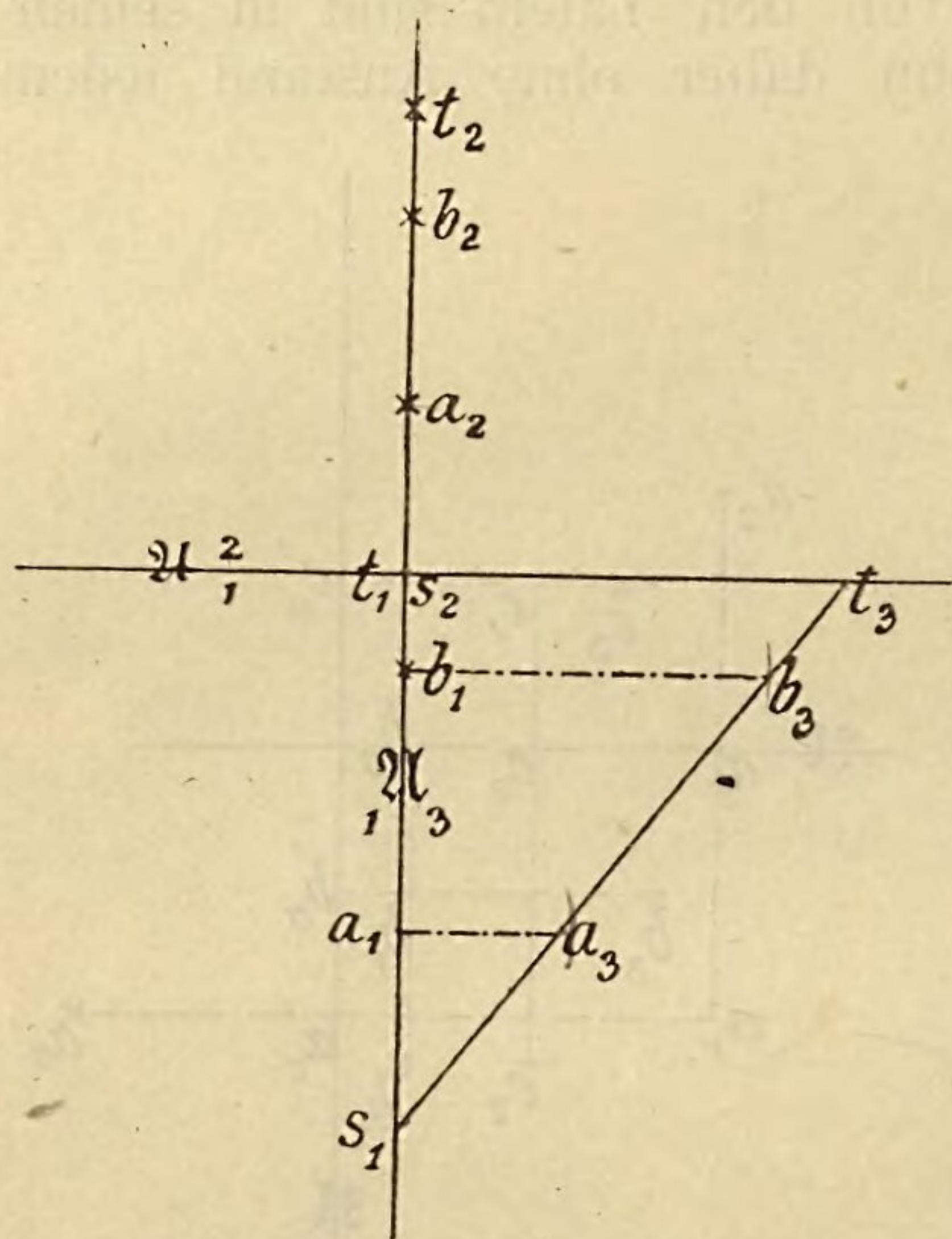


Fig. 23.

Man lege am bequemsten die $\mathfrak{T}_3$ gleich durch die Gerade ab (Fig. 23) selbst, dann ist für das System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ die a_1b_1 auch schon die $\mathfrak{A}_{13}$, und wird der dritte Riss a_3b_3 nach § 26 gefunden. Der Durchschnitt s_1 von a_3b_3 mit $\mathfrak{A}_{13}$ ist dann die erste Spur der Geraden und der Durchschnitt t_3 der a_3b_3 mit $\mathfrak{A}_{12}$ der dritte Riss der zweiten Spur. t_1 liegt in $\mathfrak{A}_{13}$ und t_2 wird gefunden, indem man $t_1t_2 = t_1t_3$ abträgt. Zur Auffindung der zweiten Spur t_2 hätte man übrigens auch das System $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$ benutzen können.

Aufgabe 12. Zu untersuchen, ob eine gelehnte Gerade (ab) und eine beliebige Gerade (cd) sich schneiden, wenn ihre gleichnamigen Risse sich schneiden.

Man projiziere sowohl ab als cd in das System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ und sehe zu, ob die Schnittpunkte der ersten und der dritten Risse in einem Achsenlot liegen oder nicht; im ersten Falle schneiden sich die Geraden, im zweiten nicht. Oder man suche (Fig. 24) die dritten Risse der ab und des vermeintlichen Schnittpunktes m; fällt m_3 in a_3b_3 , so schneiden sich die Geraden, andernfalls sind sie windschief.

Aufgabe 13. Durch einen gegebenen Punkt (a) zu einer gelehnten Geraden (bc) eine Parallele zu ziehen.

Die gesuchte Gerade erfordert ausser dem Punkte a noch einen zweiten Punkt d. Man projiziere (Fig. 25) sowohl a als bc in die $\mathfrak{T}_3$, ziehe durch a_3 die a_3d_3 parallel zu b_3c_3 , nehme in a_3d_3 den Punkt d_3 beliebig und suche zu d_3 noch d_1 u. d_2 .

Übungsaufgaben: 1) Zu untersuchen, ob 2 gelehnte Gerade, deren gleichnamige Risse ja parallel sind, auch räumlich parallel laufen.

2) Zu untersuchen, ob drei Punkte, deren Risse sämtlich in einem Achsenlot liegen, einer Geraden angehören.

3) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene gelehnte Gerade schneidet.

4) Die Spuren einer Ebene zu konstruieren, welche durch eine gelehnte Gerade und einen Punkt, oder durch zwei parallele gelehnte Gerade gegeben ist

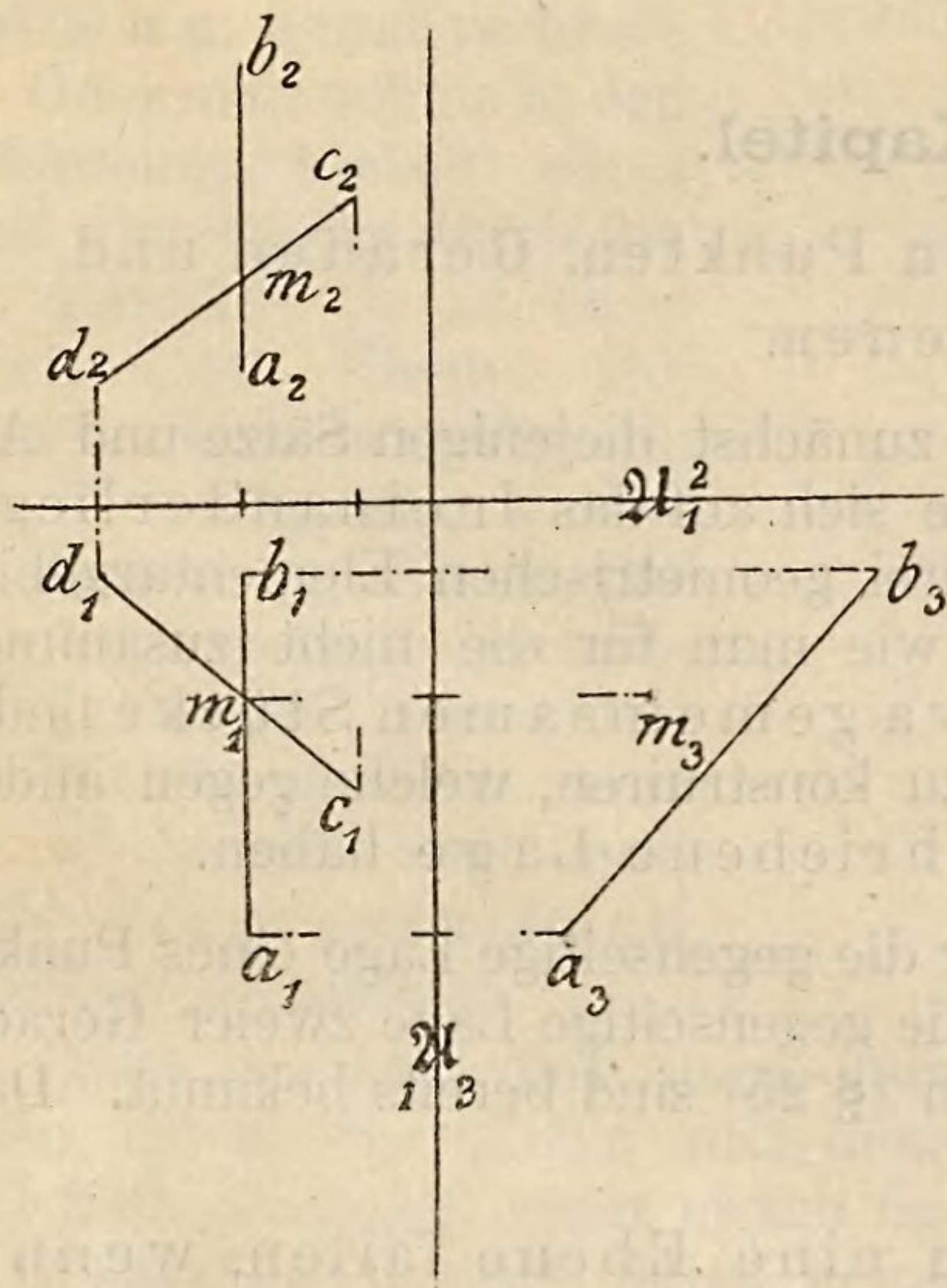


Fig. 24.

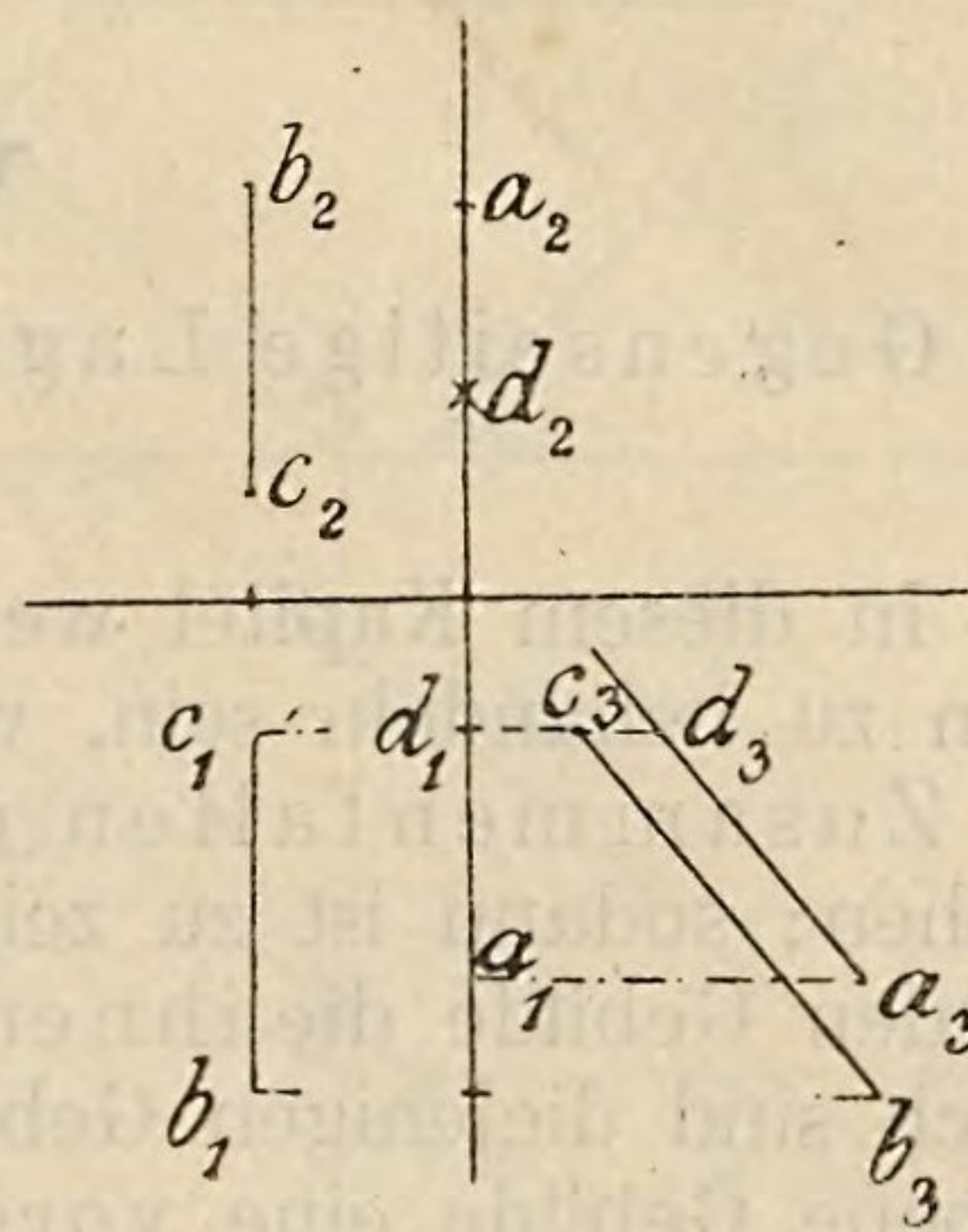


Fig. 25.

Anmerk. Hat man einen Gegenstand auf die oben besprochenen drei Tafeln projiziert, so bildet der erste Riss den „Grundriss“, der zweite den „Aufriss“, der dritte den „Seitenriss“ (Profil) des

Gegenstandes. Diese drei Bilder werden von technischen Objekten gewöhnlich aufgenommen und ist deswegen der dritten Tafel die senkrechte Stellung zu den beiden andern gegeben worden (man vergleiche § 28). Der Schnittpunkt o der 3 Achsen (Fig. 21) kann als der früher (§ 9) angenommene Ursprung betrachtet werden, dann ist die dort als Abscisse bezeichnete Strecke nichts anderes als die Entfernung von der dritten Tafel, so dass die 3 Strecken, Abscisse, erste Ordinate, zweite Ordinate die gleiche Bedeutung haben und zusammen die Coordinaten des Punktes genannt werden, während die drei Achsen die Bezeichnung Coordinatenachsen erhalten.

§ 28. Wenn wir wiederholt bedenken, dass die Beziehungen zwischen den Abständen eines Punktes und seinen Ordinaten unabhängig von der räumlichen Lage des rechtwinkligen Tafelsystems sind, so lässt sich das oben erörterte Verfahren behufs Übertragung eines Punktes aus dem System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ in das System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ oder $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$ und umgekehrt, auf jedes rechtwinklige System ausdehnen, in welchem die neue Tafel ($\mathfrak{T}_3$) irgend eine beliebige, allerdings immer noch senkrechte Stellung zu einer der alten Tafeln hat. Nur die Lage der neuen Projektionsachse ($\mathfrak{A}_{13}$) wird eine andere; ist aber dieselbe einmal bestimmt, so findet sich jedesmal der zugeordnete Riss eines Punktes im Achsenlote des neuen Systems, und die dritte Ordinate ist nach Grösse

und Vorzeichen gleich der zweiten Ordinate für das System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$, oder gleich der ersten Ordinate für das System $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$.

Übungsaufgabe: Man löse Aufgaben dieses Kapitels für den Fall, dass die neu einzuführende $\mathfrak{T}_3$ eine beliebige rechtwinklige Stellung zu einer der alten Tafeln hat. (Vergleiche § 40.)

V. Kapitel.

Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen.

In diesem Kapitel werden zunächst diejenigen Sätze und Aufgaben zu behandeln sein, welche sich auf das Ineinanderliegen oder Zusammenfallen der drei geometrischen Elementargebilde beziehen; sodann ist zu zeigen, wie man für die nicht zusammenfallenden Gebilde die ihnen etwa gemeinsamen Stücke findet; endlich sind diejenigen Gebilde zu konstruieren, welche gegen andere gegebene Gebilde eine vorgeschriebene Lage haben.

§ 29. Die Bedingungen für die gegenseitige Lage eines Punktes und einer Geraden (§ 16), für die gegenseitige Lage zweier Geraden (§ 17—§ 19) und zweier Ebenen (§ 25) sind bereits bekannt. Dazu kommen noch folgende Sätze:

1) Ein Punkt wird in eine Ebene fallen, wenn er einer beliebigen Geraden der Ebene angehört (und umgekehrt).

2) Eine Gerade wird mit einer Ebene zusammen-

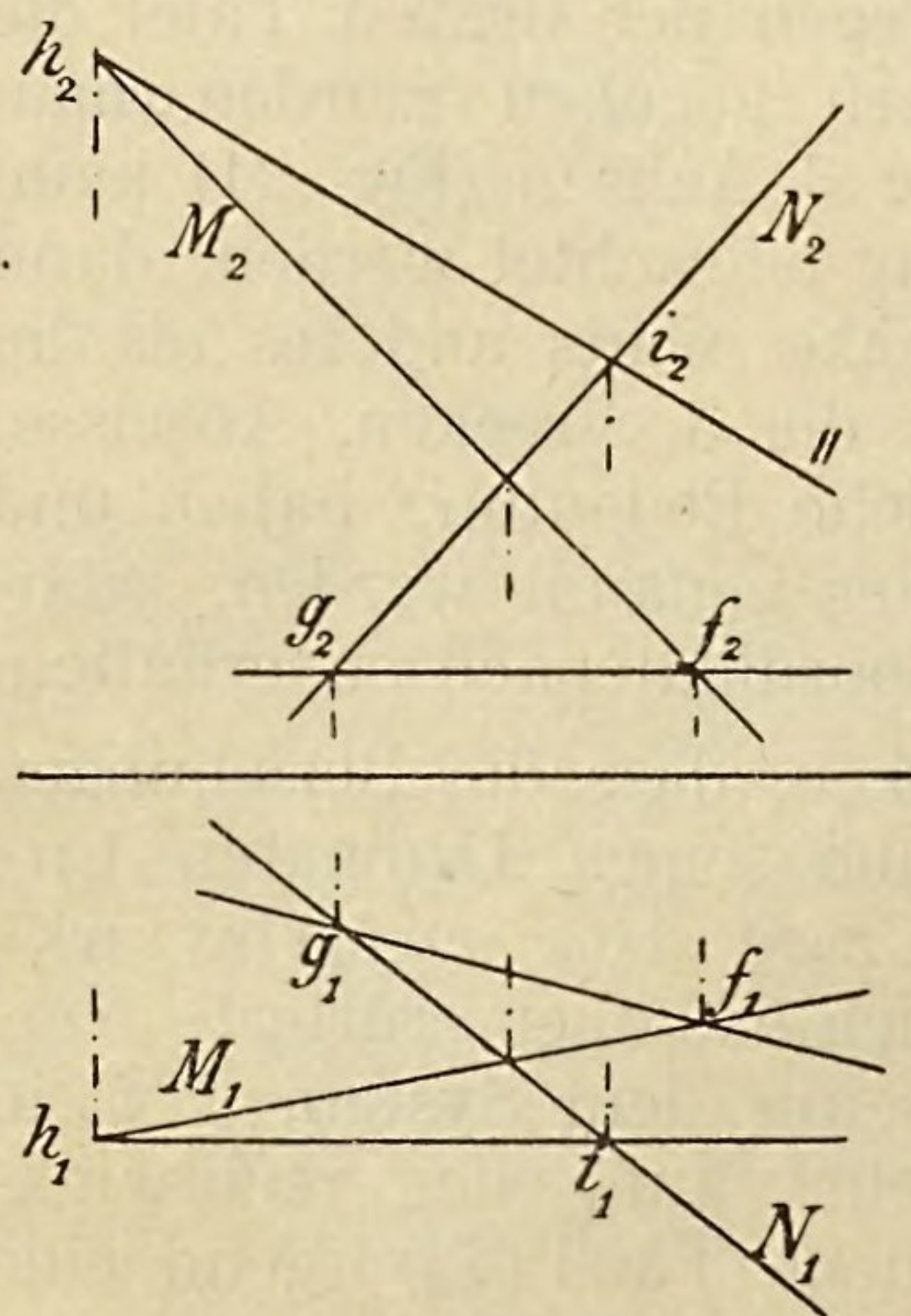


Fig. 26.

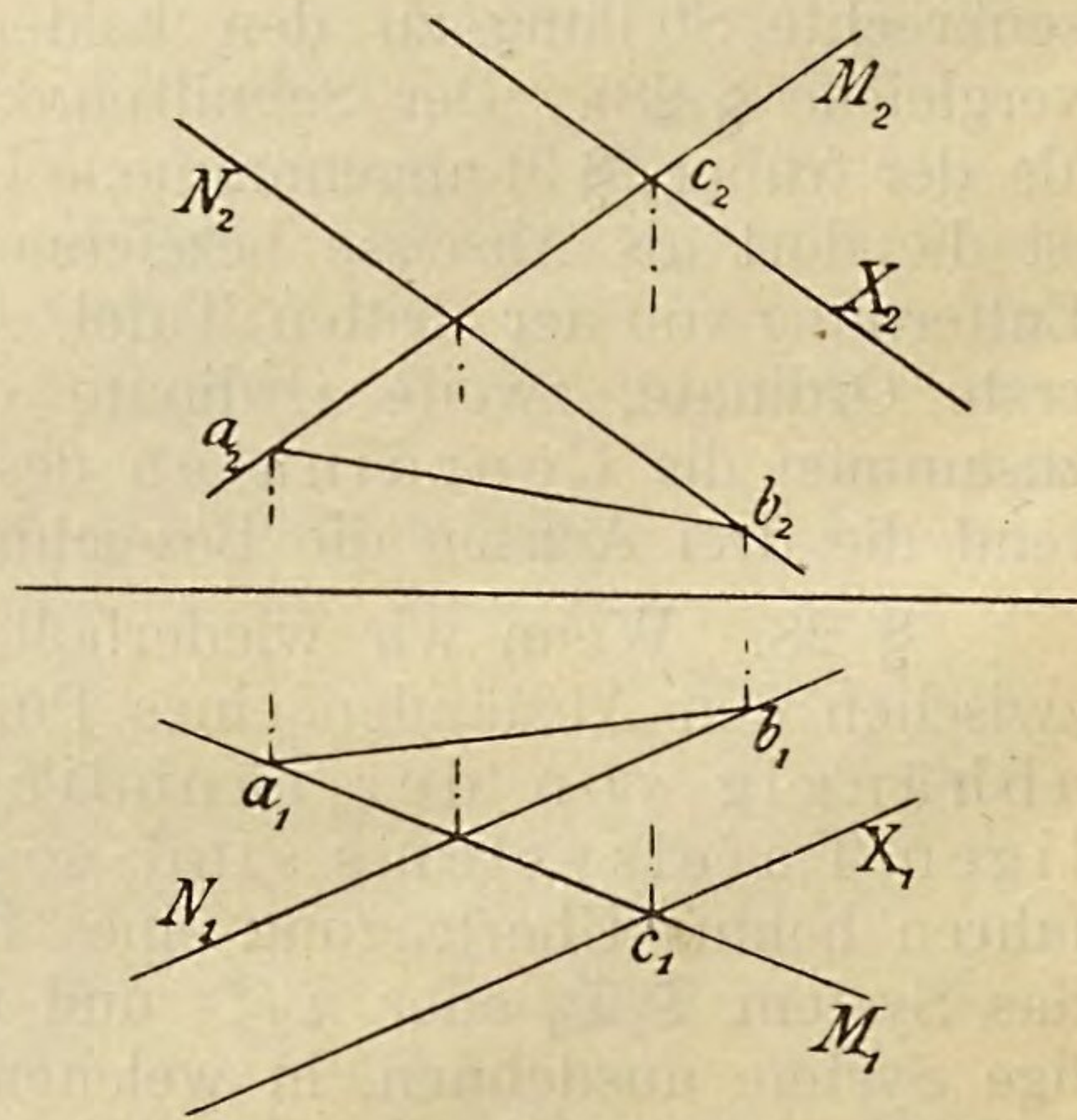


Fig. 26a.

fallen, wenn sie zwei Punkte mit ihr gemeinsam hat, oder durch einen Punkt derselben irgend einer Geraden der Ebene parallel läuft (und umgekehrt.)

Aufgabe 14. In einer gegebenen Ebene MN (Fig. 26) oder S_1T_2 (Fig. 27) eine Gerade zu ziehen.

Man wähle in den gegebenen Bestimmungstücken der Ebene zwei beliebige Punkte a u. b und verbinde sie. Oder man nehme in den Bestimmungstücken einen Punkt c und ziehe durch ihn eine Parallele X zu einer Geraden der Ebene. Die Geraden (fg u. hi in Fig. 26, X u. Y in Fig. 27), welche den Spuren der Ebene parallel sind, deren zugeordnete Risse parallel der Achse gehen, werden wir fortan erste und zweite Spurparallelen (Hauptlinien) nennen.

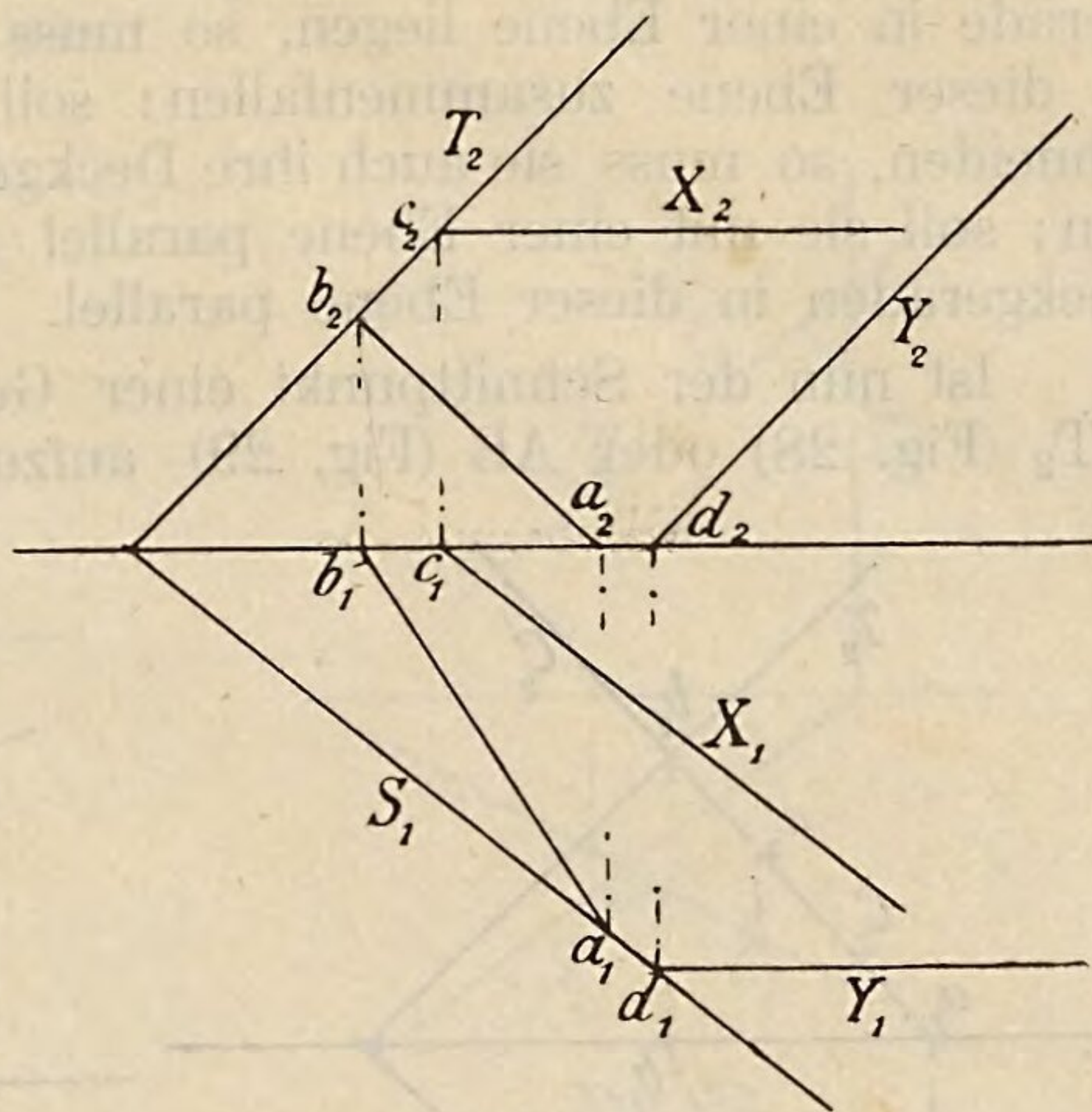


Fig. 27.

Man beachte, dass man, ausgehend von den zugeordneten Rissen, die Spurparallelen auch ohne die Spuren konstruieren kann. Der zweite Riss g_2f_2 einer ersten Spurparallele ist eine beliebige zur Achse parallele Gerade, deren erster Riss g_1f_1 sich dann von selbst ergibt. Entsprechend verfährt man bei der Konstruktion der zweiten Spurparallelen hi.

Anmerk. In der vorstehenden Lösung war der eine Riss der zu suchenden Geraden, z. B. a_1b_1 , g_2f_2 beliebig, a_2b_2 u. g_1f_1 mussten aber so bestimmt werden, dass die Punkte a_2 , b_2 , g_1 , f_1 in das Achsenlot und in die Bestimmungsgersten der Ebene zu liegen kamen. Die Aufgabe kann daher auch so gestellt werden: Zu einer beliebigen Geraden diejenige (erste od. zweite) Deckgerade zu suchen, welche einer gegebenen Ebene angehört.

Übungsaufgaben: 1) In der beliebigen Ebene ST im Abstände d von T_1 oder T_2 eine erste oder zweite Spurparallele zu ziehen.

2) Zn einer Geraden A, welche parallel der Achse ist, eine Deckgerade zu suchen, welche der gegebenen Ebene ST angehört.

Aufgabe 15. In einer bekannten Ebene einen beliebigen Punkt anzugeben.

Man ziehe in der Ebene nach Afg. 14 eine beliebige Gerade und nehme darin irgend einen Punkt. Bei gegebenen Spuren lassen sich mit Vorteil die Spurparallelen verwenden.

Anmerk. Auch diese Aufgabe kann so gefasst werden: Zu einem beliebigen Punkt denjenigen Deckpunkt zu suchen, welcher zugleich in einer gegebenen Ebene liegt.

Übungsaufgaben: 1) Zu untersuchen, ob ein durch seine Risse gegebener Punkt in eine gegebene Ebene fällt.

2) Was ist erforderlich, damit ein Punkt einer Lotebene angehört?

3) In einer Ebene, welche durch einen Punkt und eine gelehnte Gerade bestimmt ist, einen beliebigen Punkt anzugeben.

§ 30. Aufgabe 16. Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene aufzusuchen.

Alle gleichnamigen Deckgeraden müssen sich, als Gerade einer Ebene, im Endlichen oder Unendlichen schneiden. Soll nun eine Gerade in einer Ebene liegen, so muss sie mit ihrer Deckgeraden in dieser Ebene zusammenfallen; soll eine Gerade eine Ebene schneiden, so muss sie auch ihre Deckgerade in dieser Ebene schneiden; soll sie mit einer Ebene parallel sein, so ist sie auch ihrer Deckgeraden in dieser Ebene parallel.

Ist nun der Schnittpunkt einer Geraden C und einer Ebene S_1T_2 (Fig. 28) oder AB (Fig. 29) aufzusuchen, so konstruiere man

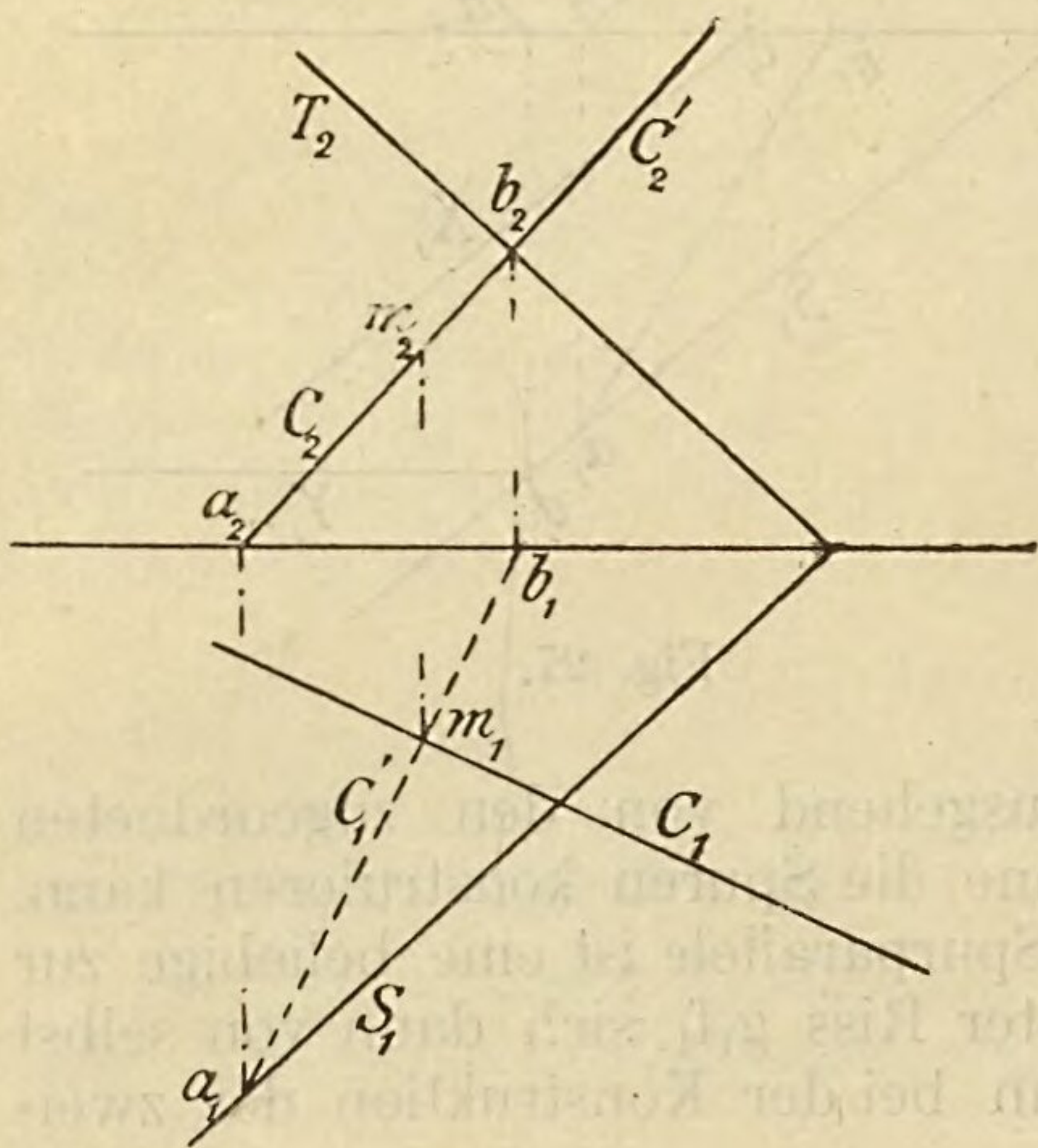


Fig. 28.

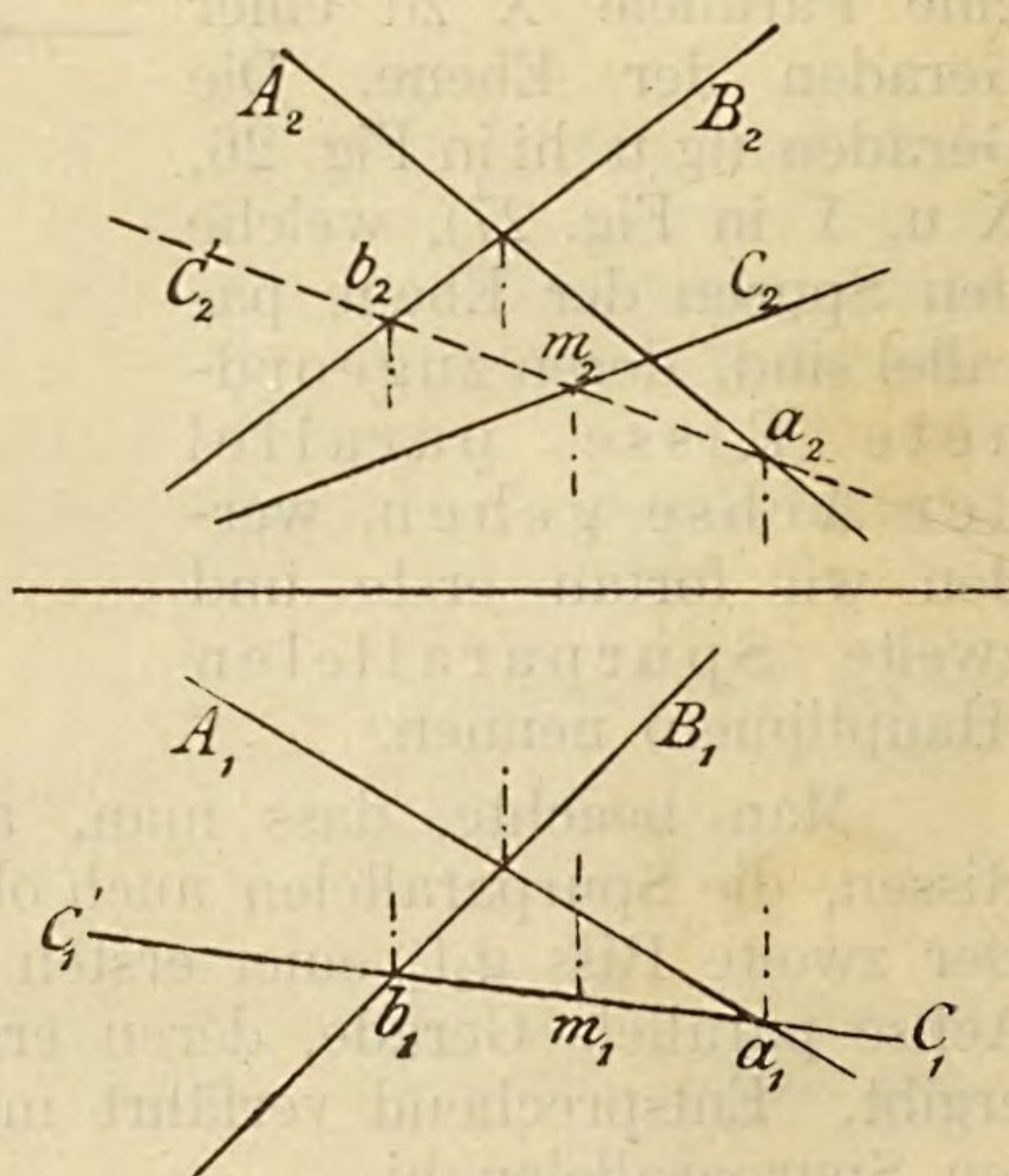


Fig. 29.

zu der Geraden eine in der gegebenen Ebene liegende Deckgerade C' . Der Schnittpunkt m derselben mit C ist zugleich der geforderte Schnittpunkt der Geraden und Ebene.

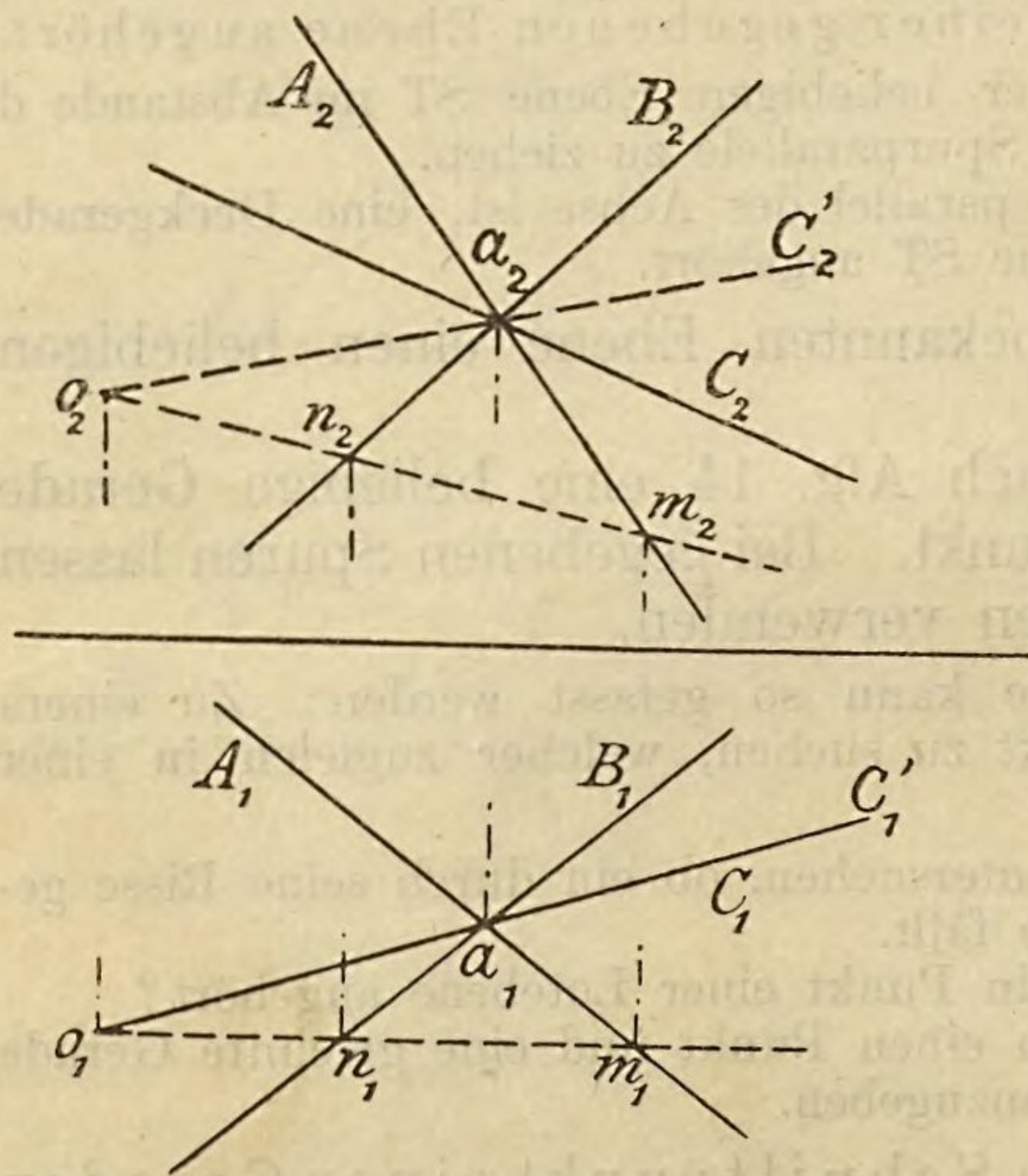


Fig. 30.

Anmerk. 1. Ist AB (Fig. 30) die gegebene Ebene und geht die Gerade C durch den Schnittpunkt a der beiden Geraden A u. B , so wähle man zur Aufsuchung der Deckgeraden C' eine beliebige, nicht durch a gehende Gerade mn der Ebene. (m_1n_1 schneidet C_1 in o_1 , o_2 liegt senkrecht darüber in m_2n_2 und liefert mit a_2 verbunden die Deckgerade C' .) Fällt C' mit C zusammen, so fällt auch C in die Ebene, wenn nicht (Fig. 30), so ist a der Schnittpunkt der Geraden C mit Ebene AB .

Anmerk. 2. Ist die Ebene $A \parallel B$ gegeben, und auch $C \parallel A$, so wird man zur Bestimmung der Deckgeraden ebenfalls andere Gerade der Ebene AB verwenden und dadurch entscheiden, ob C der Ebene AB angehört oder ihr parallel ist.

Zusatz 1. Ist die gege-

bene Gerade ein Lot c_1 (Fig. 31), so ist c_1 schon der erste Riss des gesuchten Schnittpunktes, während der zweite Riss c_2 nach Aufgabe 15 nachzubringen ist.

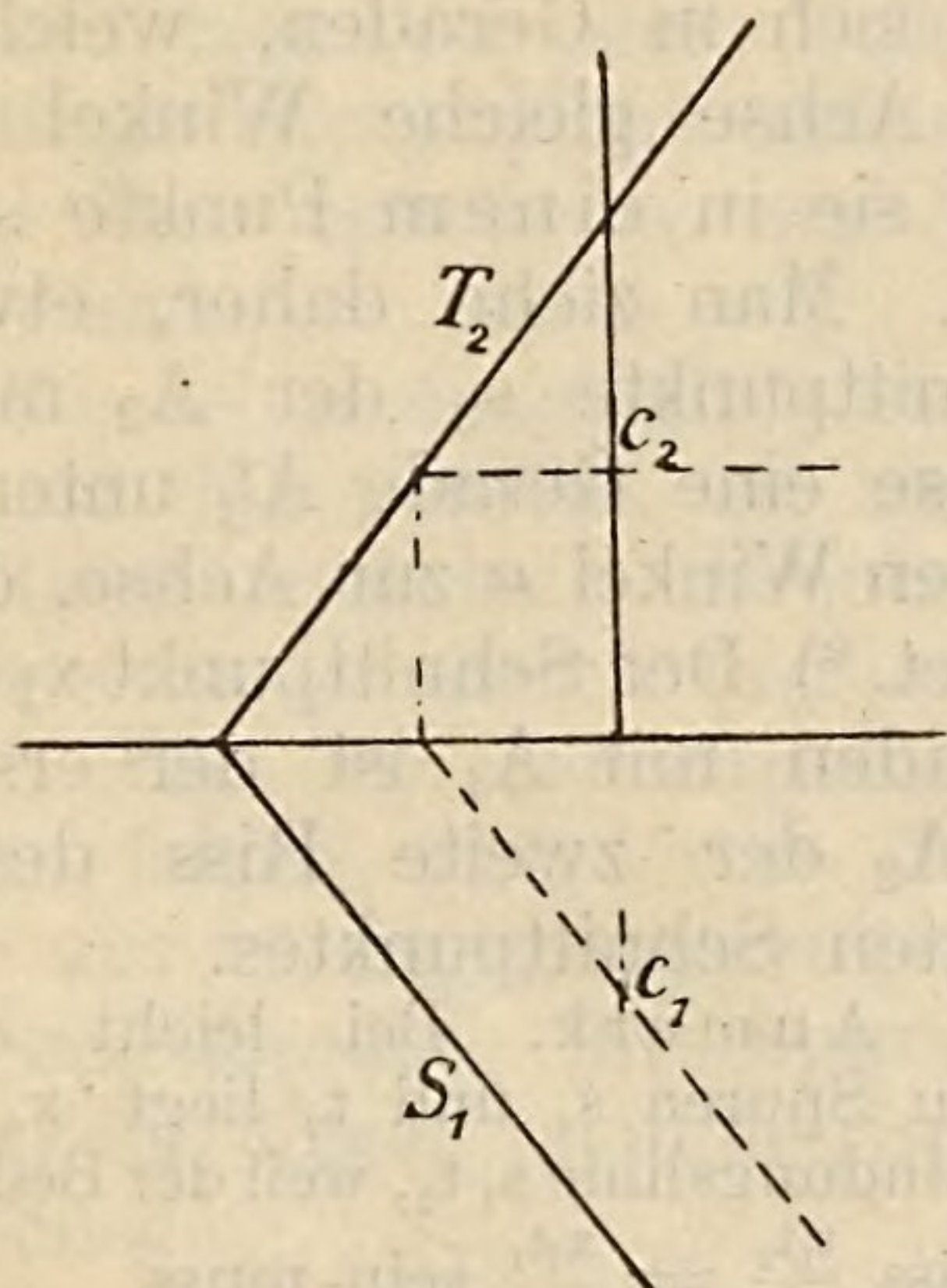


Fig. 31.

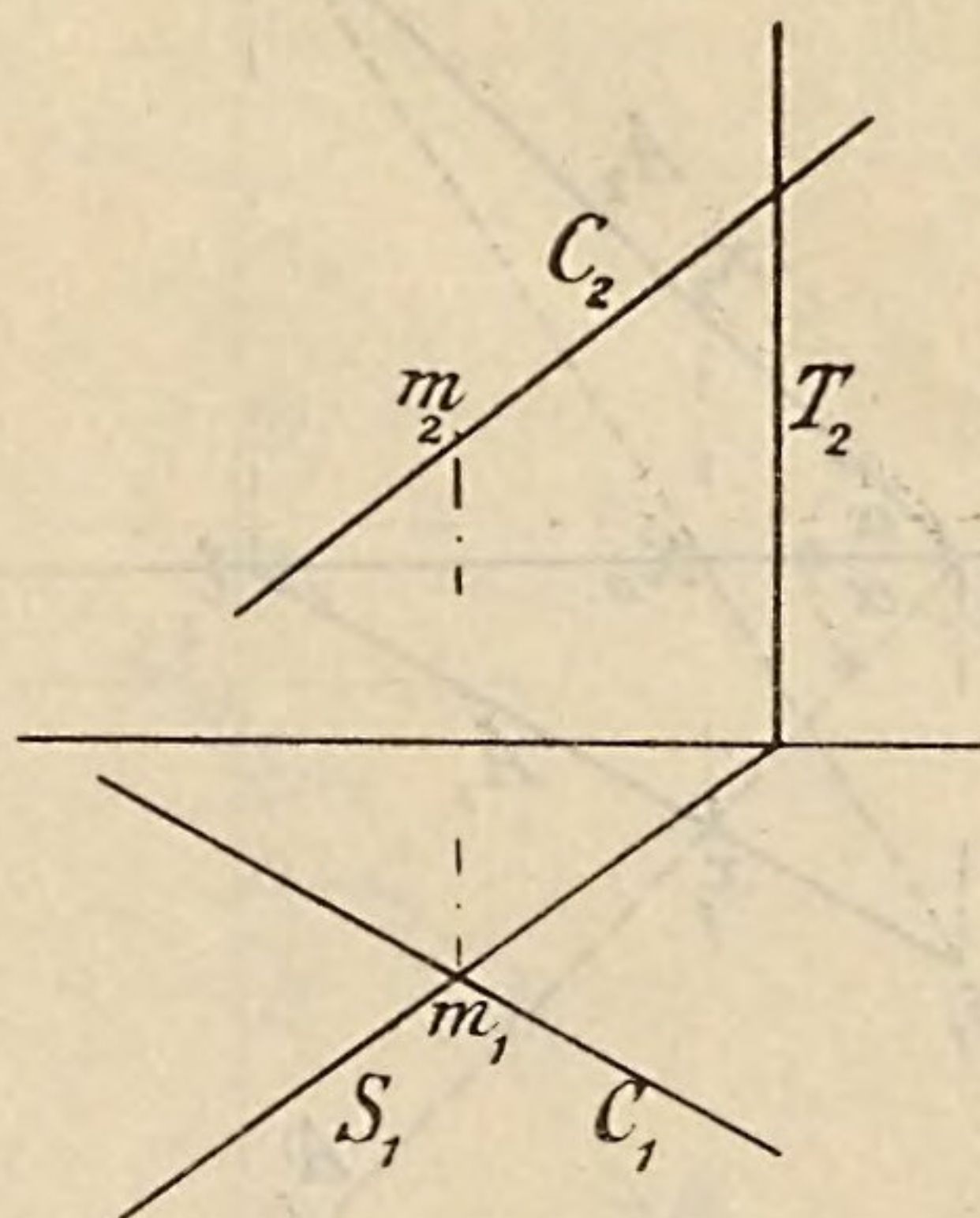


Fig. 32.

Zusatz 2. Ist die gegebene Ebene eine erste Lotebene S_1 (Fig. 32), so ist der Schnittpunkt m_1 der ersten Risse S_1 u. C_1 der erste Riss des gesuchten Schnittpunktes, der zweite Riss m_2 liegt in C_2 .

Zusatz 3. Wird die gegebene Gerade zu einer gelehnten (a_1b_1, a_2b_2 Fig. 33), so projiziere man Gerade und Ebene auf die Seitenebene in a_3b_3 u. U_3 , um sofort nach Zus. 2 in x_3 den dritten Riss des Schnittpunktes zu erhalten, welcher ohne Anstand in T_1 u. T_2 zurückprojiziert werden kann.

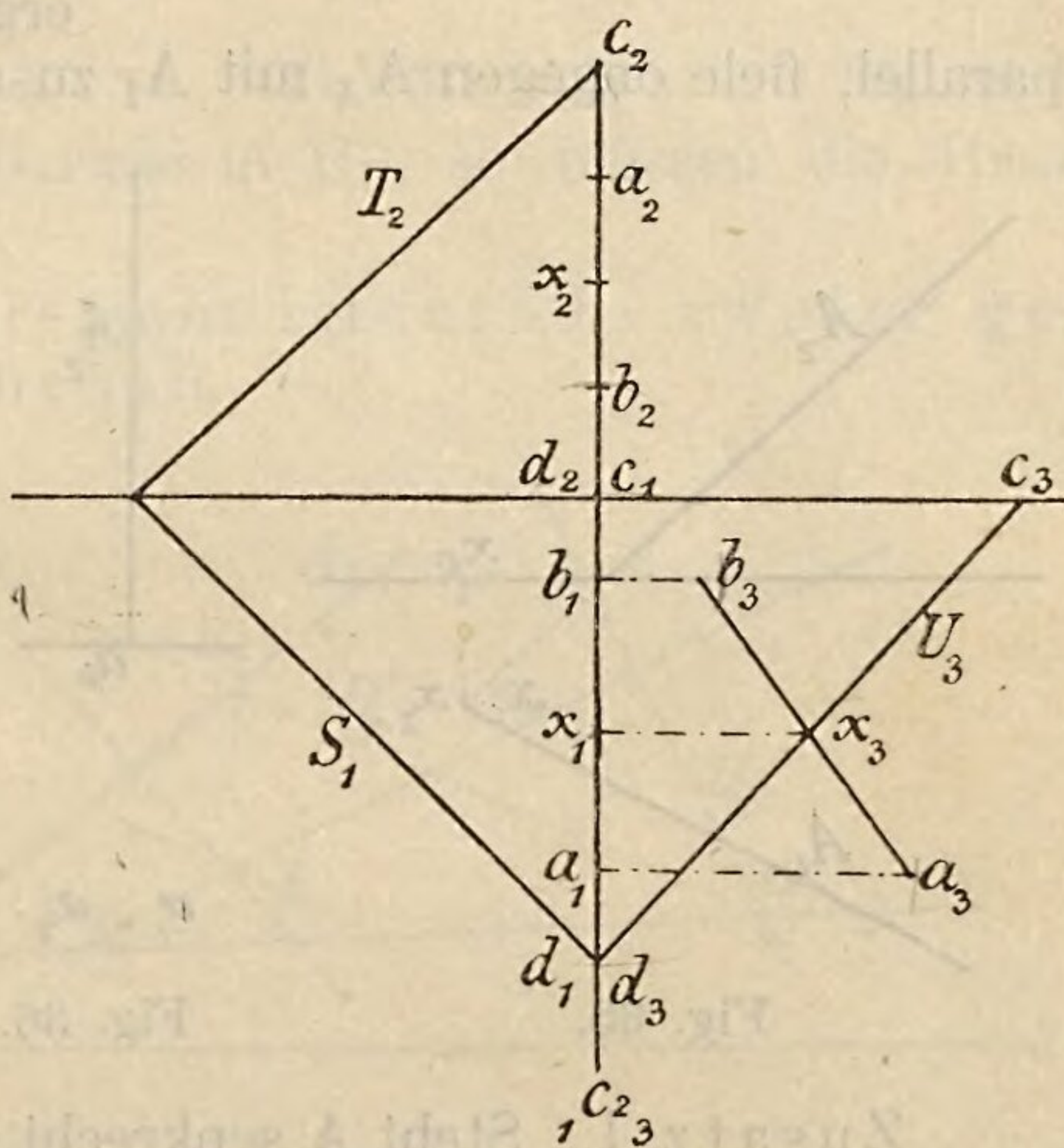


Fig. 33.

Zusatz 4. Ist die schneidende Gerade ein Lot und die Ebene eine gelehnte, so kann man wieder die Seitenebene zu Hilfe nehmen oder auch nach Zus. 1 verfahren.

Übungsbeispiele: Den Schnittpunkt zu suchen: 1) der beliebigen Ebene S_1T_2 mit der zur Achse parallelen Geraden A , 2) der zur Achse senkrechten Ebene U_1V_2 mit der beliebigen Geraden A , 3) der gelehnten Ebene M_1N_2 mit der Geraden ab , wofür a $(0, 2, -3)$, b $(1, 2, 1)$ oder a $(0, 3, 0)$, b $(0, 3, 2)$.

Aufgabe 17. Den Schnittpunkt einer Geraden mit der ersten Halbierebene des Systems aufzusuchen.

Die Risse des gesuchten Punktes liegen einerseits in den

gleichnamigen Rissen der Geraden A_1A_2 (Fig. 34), andererseits als der H_I angehörig, gleichweit von der Achse entfernt (§ 15, Afig. 6).

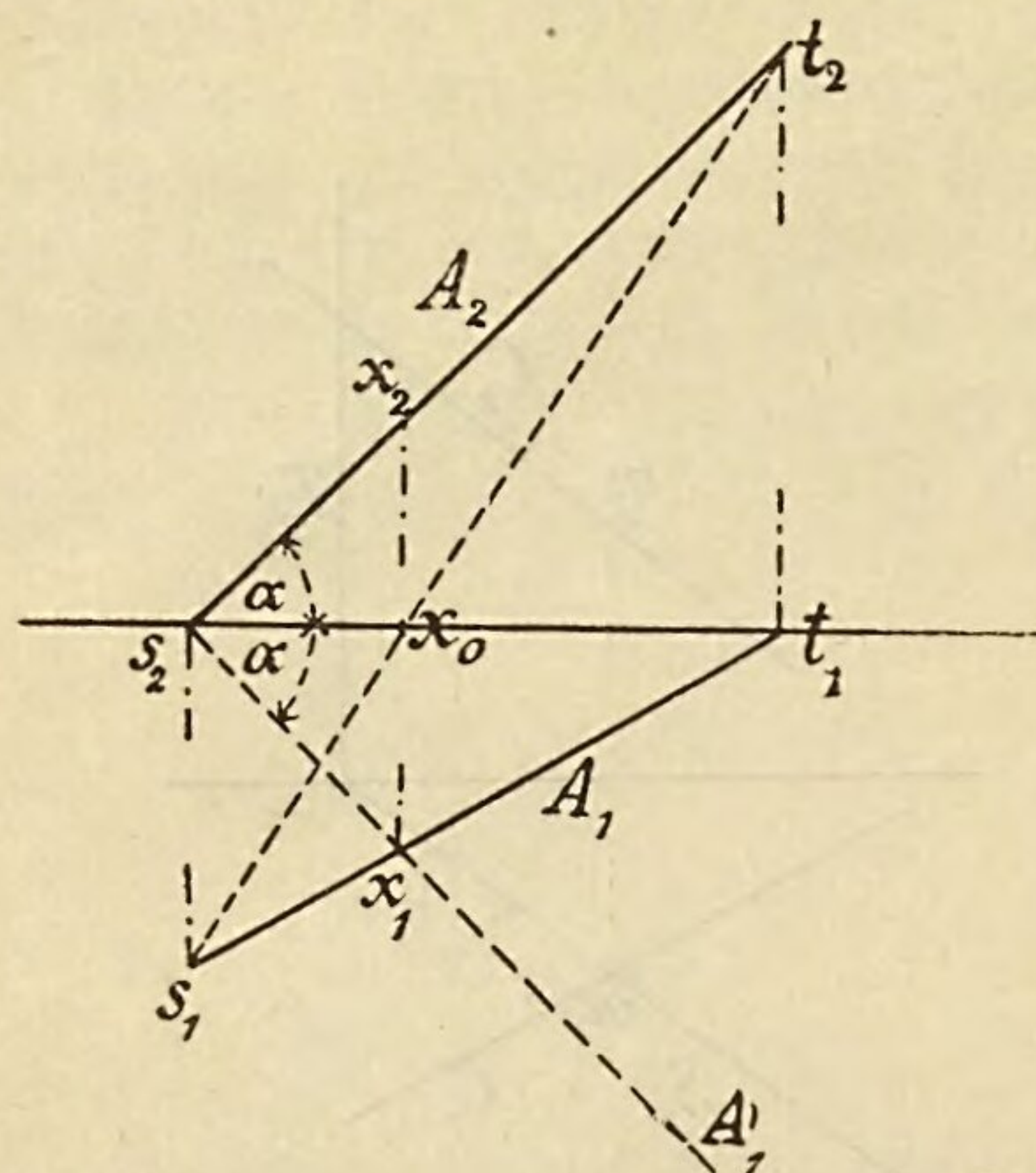


Fig. 34.

Punkte der letzten Eigenschaft finden sich in Geraden, welche mit der Achse gleiche Winkel bilden und sie in einem Punkte schneiden. Man ziehe daher, etwa im Schnittpunkte s_2 der A_2 mit der Achse eine Gerade A'_1 unter demselben Winkel α zur Achse, den A_2 bildet.*) Der Schnittpunkt x_1 dieser Geraden mit A_1 ist der erste, x_2 in A_2 der zweite Riss des verlangten Schnittpunktes.

Anmerk. Bei leicht zugänglichen Spuren s_1 und t_2 liegt x_0 in der Verbindungslinie s_1t_2 , weil der Bedingung gemäss $\frac{t_1t_2}{s_1s_2} = \frac{x_0t_1}{x_0s_2}$ sein muss.

Zusatz: Würde sich $A'_1 \parallel A_1$ ergeben, so wäre auch A der H_I parallel, fiel dagegen A'_1 mit A_1 zusammen, so gehörte A der H_I an.

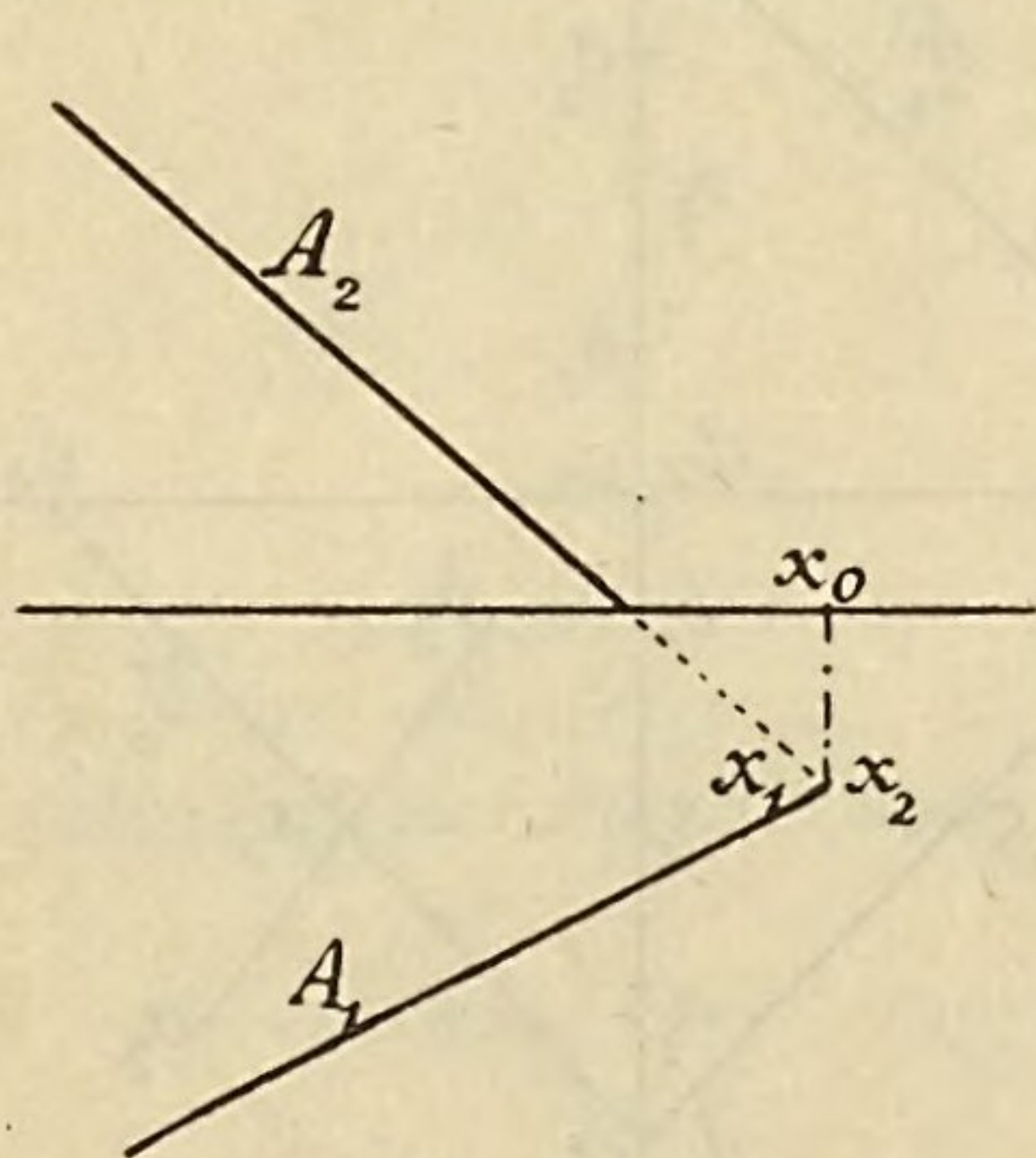


Fig. 35.

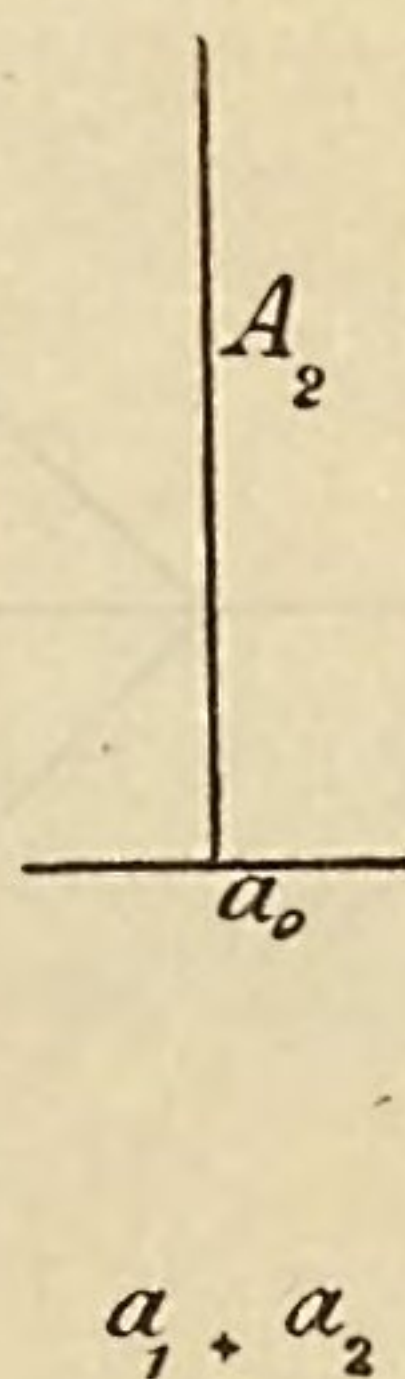


Fig. 36.

Aufgabe 18. Den Schnittpunkt einer Geraden mit der zweiten Halbiebene aufzusuchen.

Der gesuchte Schnittpunkt liegt einerseits in der Geraden A (Fig. 35), andererseits in der Halbiebene, weshalb seine beiden Risse in einen Punkt zusammenfallen müssen. Der Schnittpunkt x_1x_2 der beiden Risse A_1 und A_2 ist daher der gesuchte Punkt.

Zusatz 1. Steht A senkrecht zu einer Tafel, z. B. der ersten, (a_1, A_2 Fig. 36), so ist a_1 , zusammenfallend mit a_2 , der gesuchte Schnittpunkt. — Wird $A_1 \parallel A_2$, so ist A der H_{II} parallel. — Fällt A_1 in die Verlängerung von A_2 , so gehört A der II. Halbiebene an (§ 15, Afig. 7). Eine Ausnahme hievon macht jedoch die gelehnte Gerade, bei welcher die Risse beliebiger Punkte sich im allgemeinen nicht decken.

Zusatz 2. Wird die Gerade der Aufgaben 17 und 18 zu einer gelehnten, so nehme man wieder die Seitenebene zu Hilfe. Für diejenigen gelehnten Geraden, welche den Halbiebenen parallel sind oder mit ihnen zusammenfallen, ergeben sich aus den letzten Aufgaben folgende Sätze, welche sich mit Hilfe des § 45 auch direkt aufstellen lassen:

*) A' kann auch als Deckgerade zu A aufgefasst werden (§ 15).

1. Ist eine gelehnte Gerade zur H_I parallel, so sind die ersten und zweiten Risse einzelner Strecken einander gleich ($a_1b_1 = a_2b_2$, $b_1c_1 = b_2c_2 \dots$ Fig. 37) und die Punkte folgen von der Achse aus in gleichem Sinne aufeinander. Ihre Spuren s_1 und t_2 decken sich.

2. Ist eine gelehnte Gerade zur H_{II} parallel, so sind die Risse einzelner Strecken wieder einander gleich ($a_1b_1 = a_2b_2 \dots$ Fig. 38), die einzelnen Punkte folgen aber von der Achse aus in entgegengesetztem Sinne aufeinander. Ihre Spuren s_1 und t_2 liegen symmetrisch zur Achse.

3. Fällt eine gelehnte Gerade in H_I , so liegen die Risse aller ihrer Punkte symmetrisch zur Achse.

4. Fällt eine gelehnte Gerade in H_{II} , so müssen die Risse aller ihrer Punkte sich decken.

§ 31. Aufgabe 19. Die Schnittgerade zweier gegebener Ebenen aufzusuchen.

1. Man suche nach Aufg. 16 die Schnittpunkte zweier Geraden der einen Ebene mit der andern, oder je einer Geraden beider Ebenen mit der andern Ebene und verbinde sie. In Fig. 39 sind AB und CD die gegebenen Ebenen und wurden die Schnittpunkte m u. n der C u. D mit $Eb. AB$ gesucht. mn ist die verlangte Schnittlinie.

Anmerk. 1. Fände man nach Aufg. 16 An-

merk. beide Gerade der einen Ebene in der anderen liegend, so würden die Ebenen selbst zusammenfallen. Fiele hingegen nur eine Gerade in die Ebene, während die zweite diese schnitte, so wäre in jener Geraden auch schon die Schnittlinie vorhanden.

Anmerk. 2. Im Falle, dass die sich schneidenden Geraden der einen

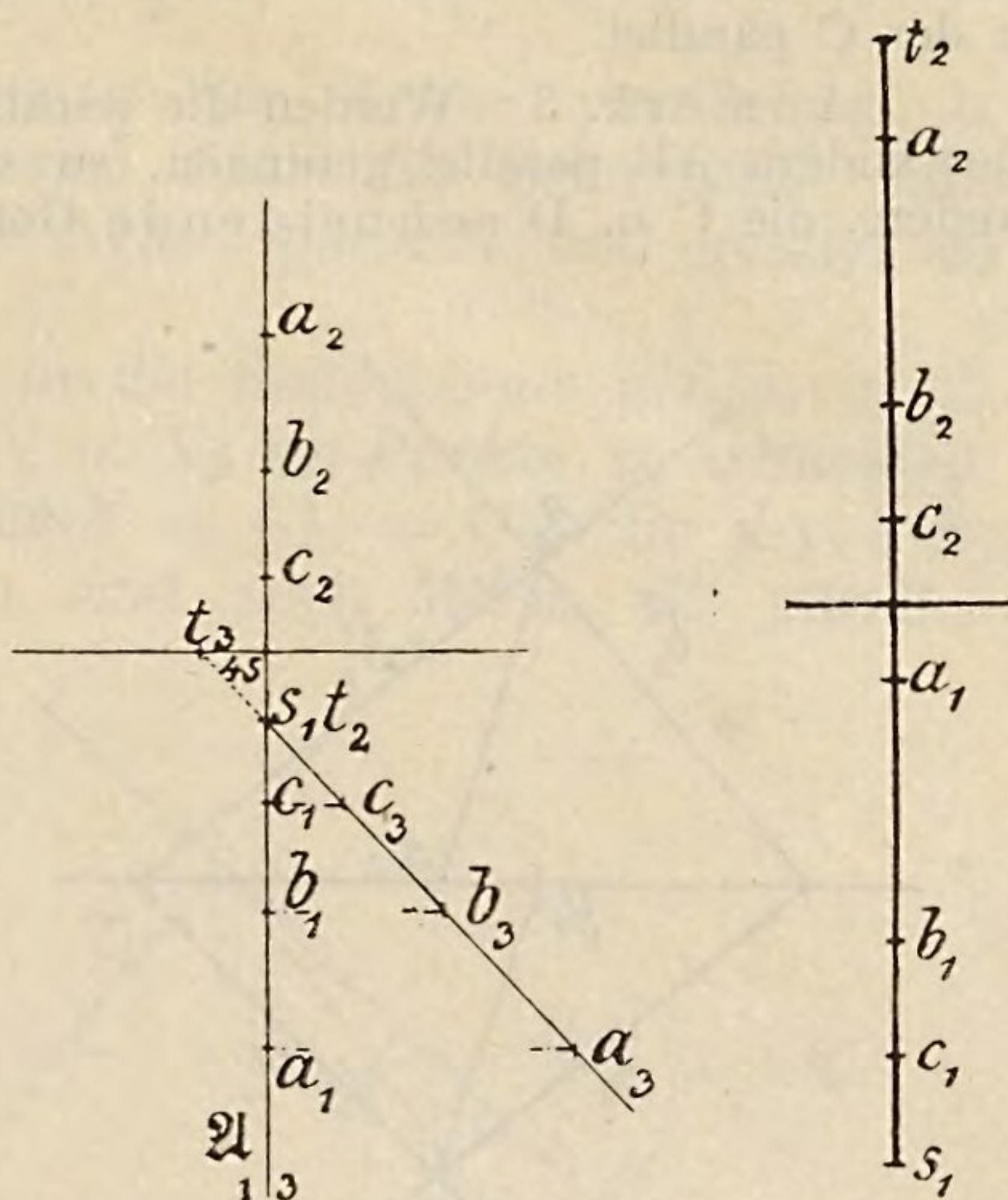


Fig. 37.

Fig. 38.

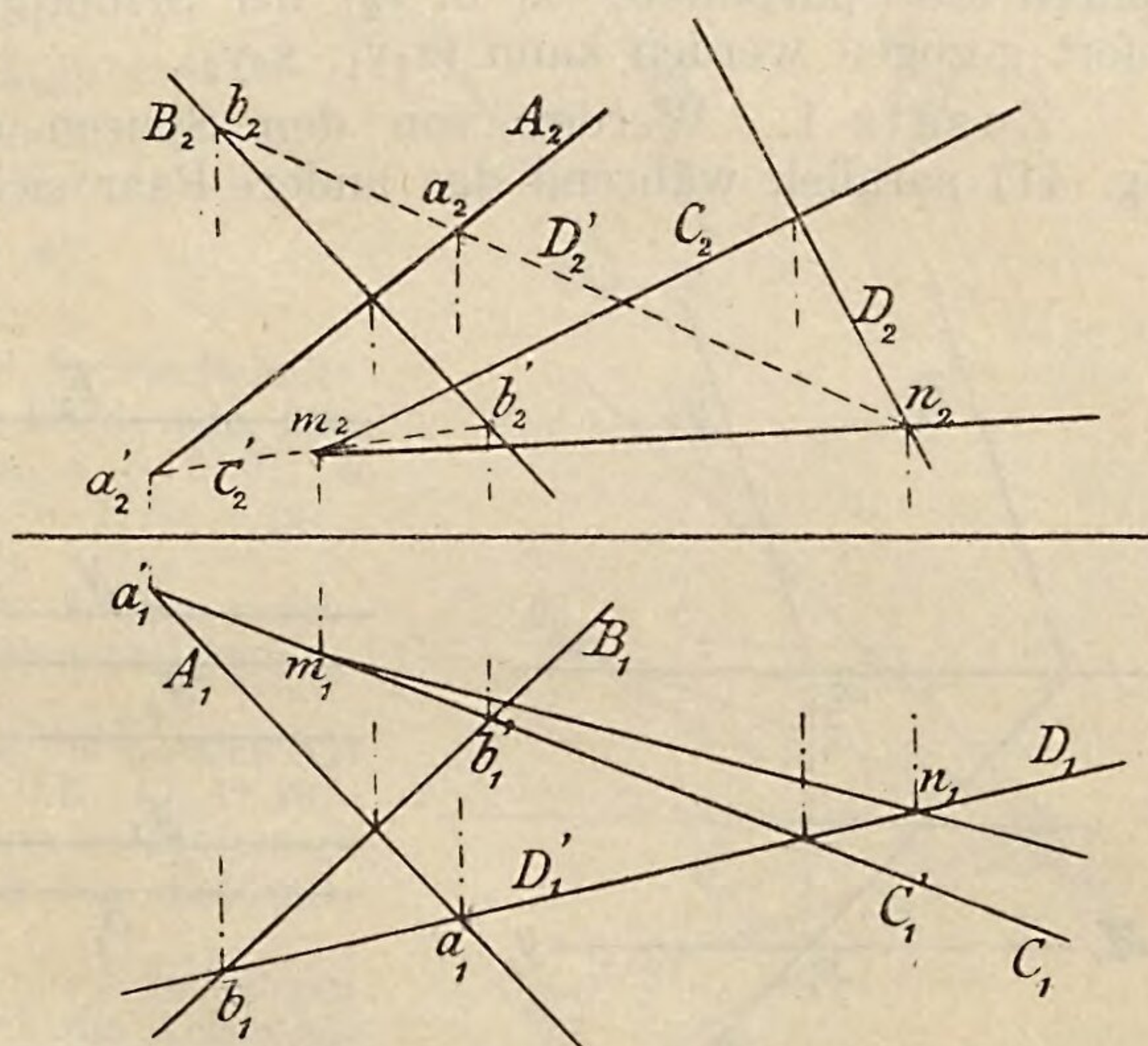


Fig. 39.

Ebene (C u. D) beide der anderen Ebene AB parallel laufen, sind auch die Ebenen selbst parallel; würde dagegen nur eine (C) der Ebene AB parallel, und die andere (D) schneide sie in n , so ginge die gesuchte Schnittlinie durch n der C parallel.

Anmerk. 3. Werden die parallelen Geraden (C u. D) der einen Ebene der andern AB parallel gefunden, so wäre statt der einen jener Geraden eine andere, die C u. D schneidende Gerade der Ebene CD einzuführen.

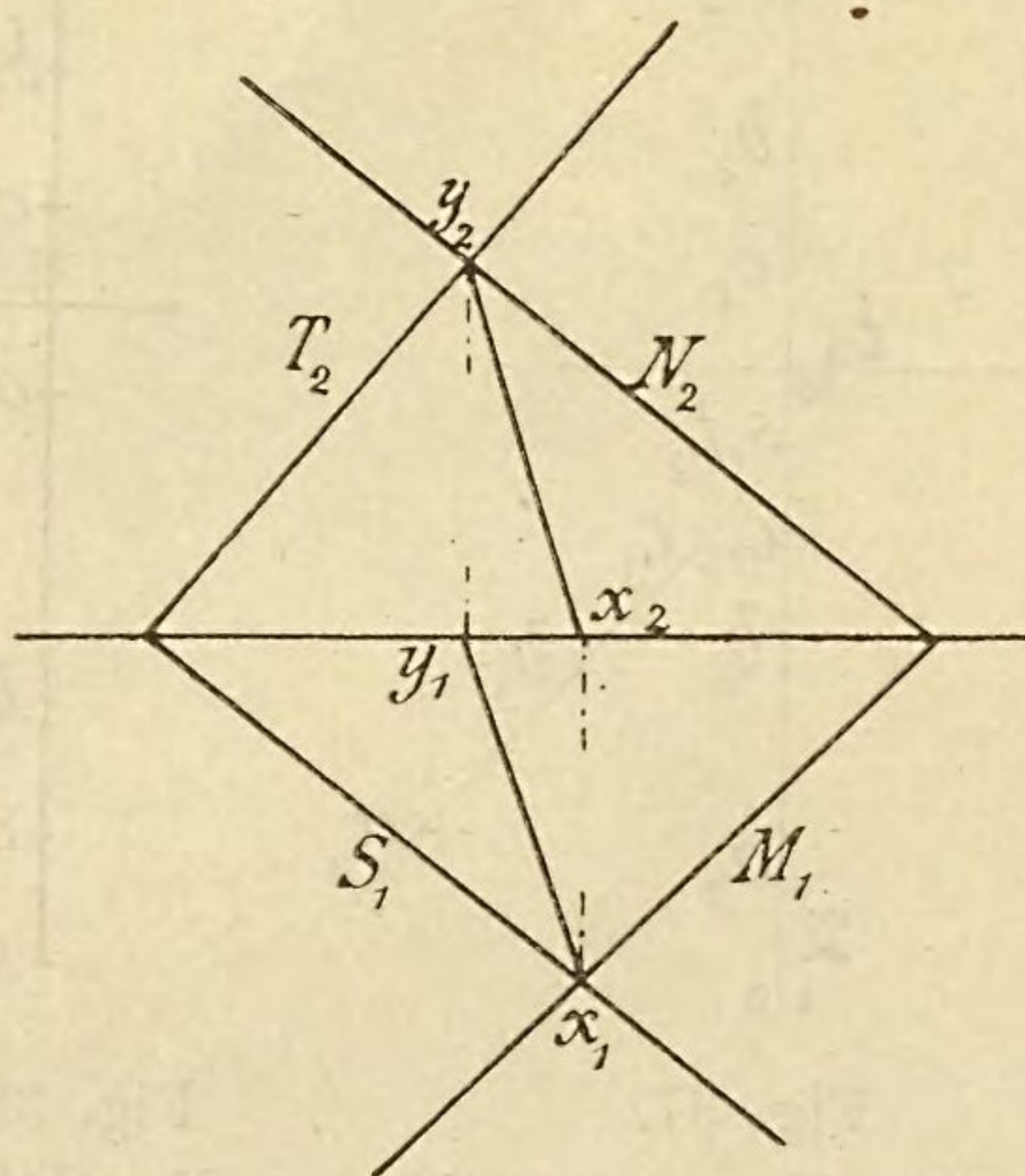


Fig. 40.

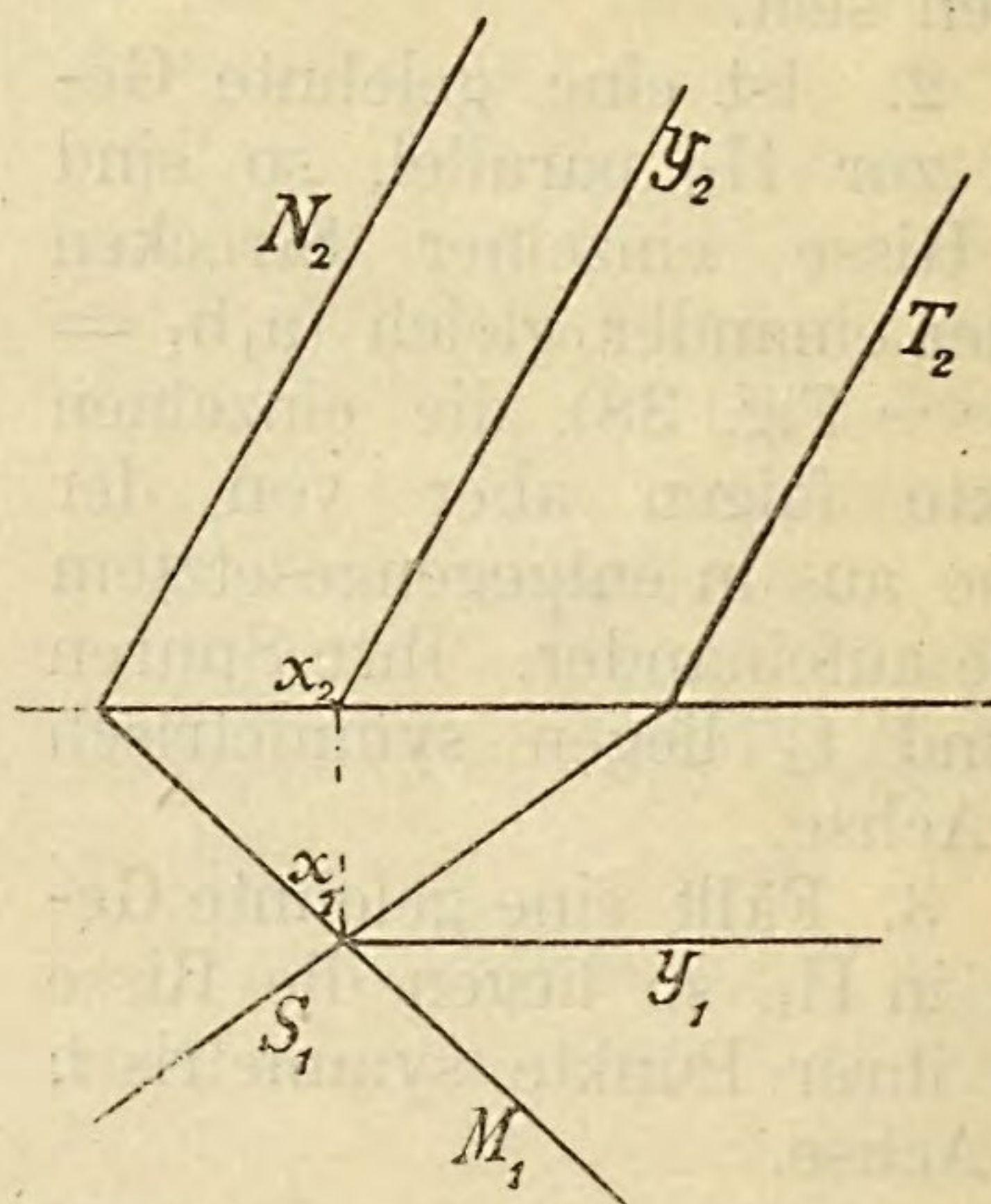


Fig. 41.

2. Die Ebenen sind durch ihre Spuren M_1N_2 u. S_1T_2 (Fig. 40) gegeben; dann erhält man in den Schnittpunkten der gleichnamigen Spuren die Spurpunkte (x_1 u. y_2) der Schnittgeraden, welche nun sofort gezogen werden kann (x_1y_1 , x_2y_2).

Zusatz 1. Werden von den Spuren ein Paar (N_2 u. T_2 Fig. 41) parallel, während das andere Paar sich schneidet, so rückt

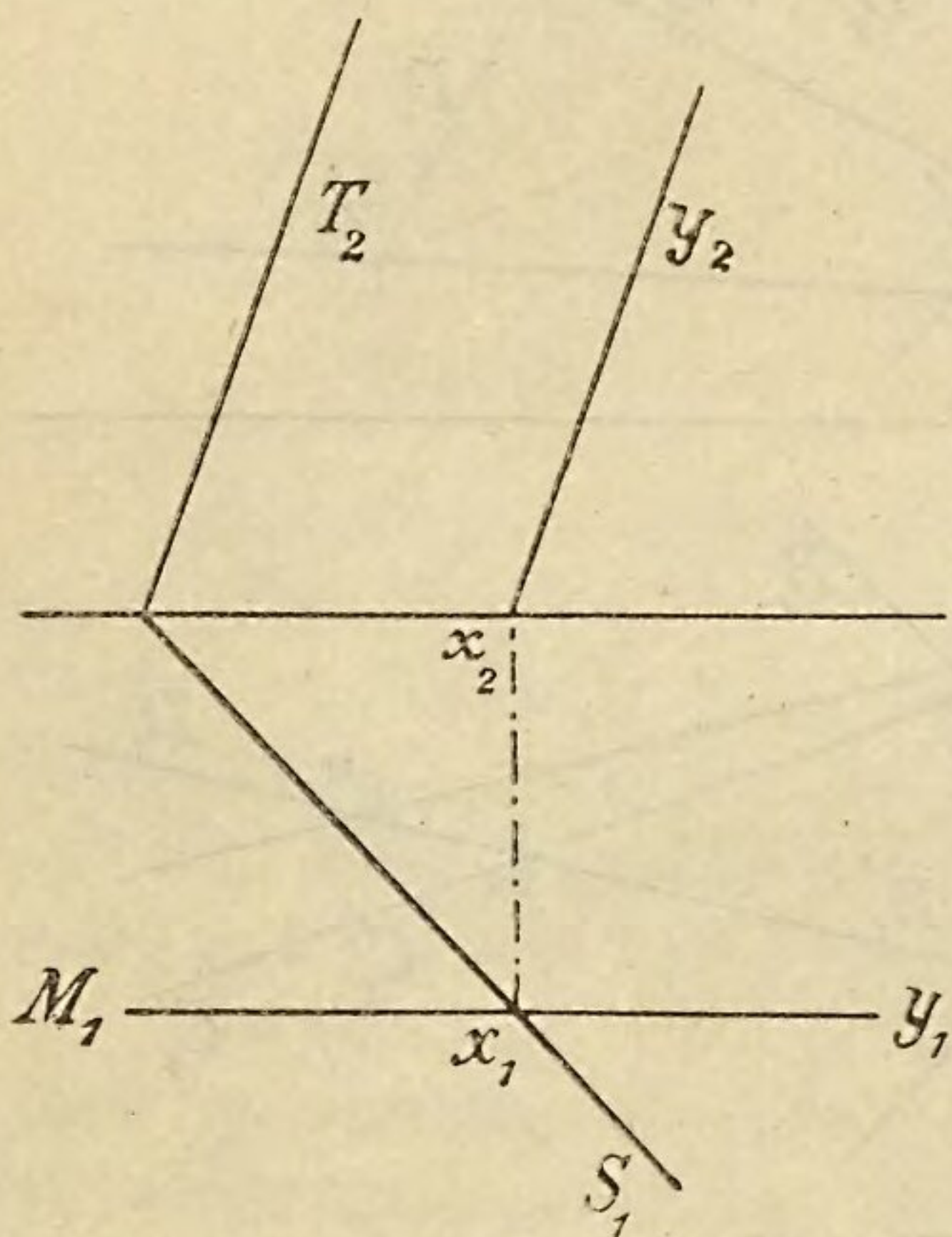


Fig. 42.

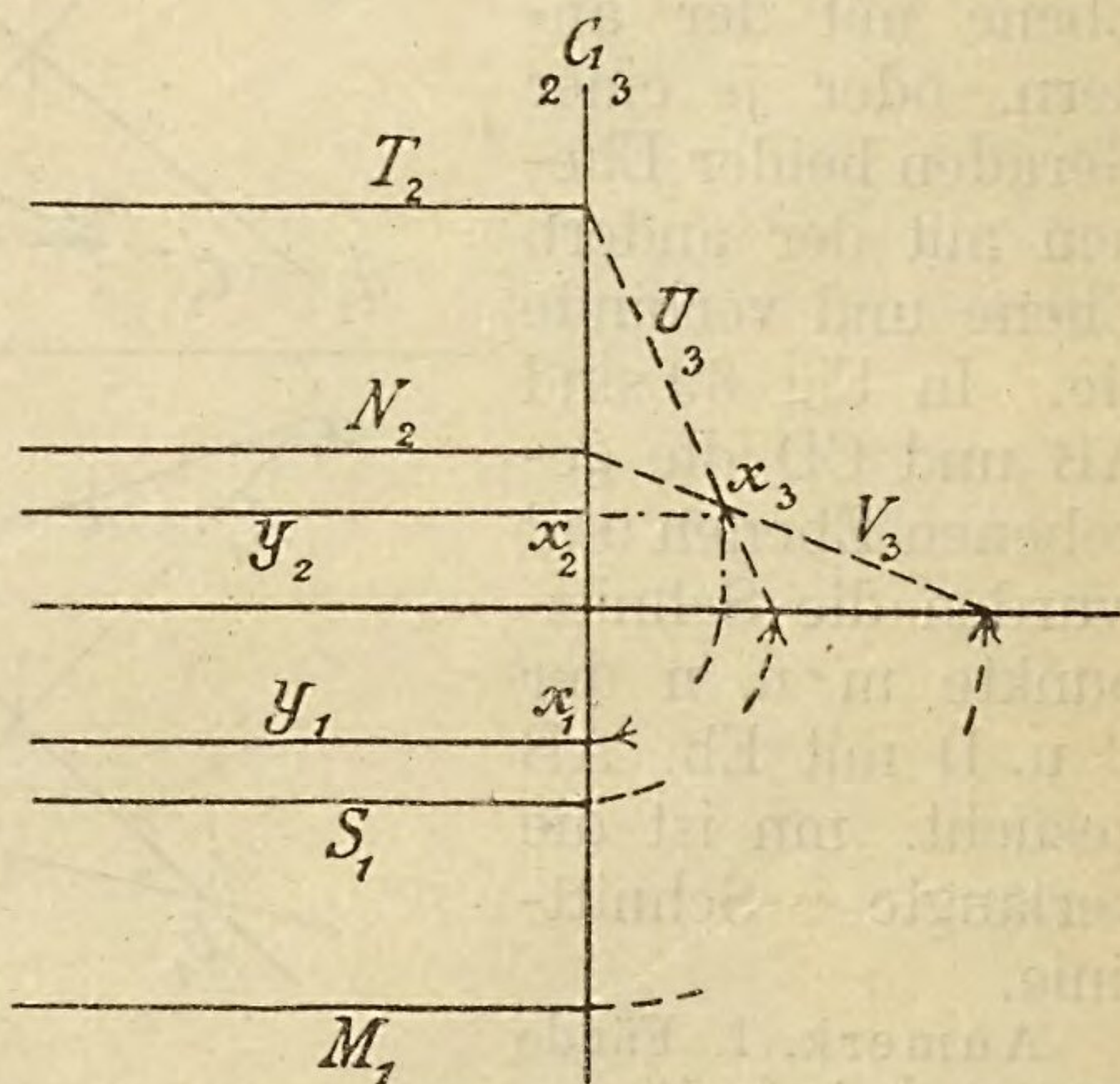


Fig. 43.

der Schnittpunkt y_2 jener Spuren ins Unendliche und mit ihm auch y_1 in der Achse, d. h. x_2y_2 wird parallel zu N_2 u. T_2 , x_1y_1 parallel zur Achse.

Zusatz 2. Wird M_1 der Achse parallel und fällt N_2 ins Unendliche (Fig. 42), so fällt x_1y_1 mit M_1 zusammen, x_2y_2 wird der T_2 parallel.

Zusatz 3. Sind beide Ebenen der Achse parallel, d. h. $M_1 \parallel S_1 \parallel A \parallel N_2 \parallel S_2$ (Fig. 43), so wird auch die Schnittlinie, falls überhaupt eine vorhanden ist, der Achse parallel und genügt zu ihrer Bestimmung ein Punkt.

Man projiziere beide Ebenen in die Seitenebene als U_3 u. V_3 (System T_2T_3). Wenn sich nun U_3 u. V_3 im Punkte x_3 schneiden, so geht durch ihn die $x_2y_2 \parallel \mathcal{U}$, durch x_1 ($O_1 = O_3$) die $x_1y_1 \parallel \mathcal{U}$; sind dagegen U_3 u. V_3 parallel, so sind auch MN u. ST parallel.

Zusatz 4. Ergeben die Spuren keinen zugänglichen Schnittpunkt (Fig. 44), so schneide man beide Ebenen durch eine passend gewählte Hilfsebene, z. B. die Ebene $V_2 \parallel T_1$. Die Schnittlinie der V_2 mit MN , nämlich A_1, A_2 und jene der V_2 mit ST , nämlich B_1, B_2 schneiden sich im Punkte x_1x_2 , welcher beiden gegebenen Ebenen und somit deren Schnittlinie angehört. Durch eine weitere Hilfsebene W_1 erhält man, wenn nötig, noch einen anderen Punkt y und damit die Schnittlinie xy selbst*).

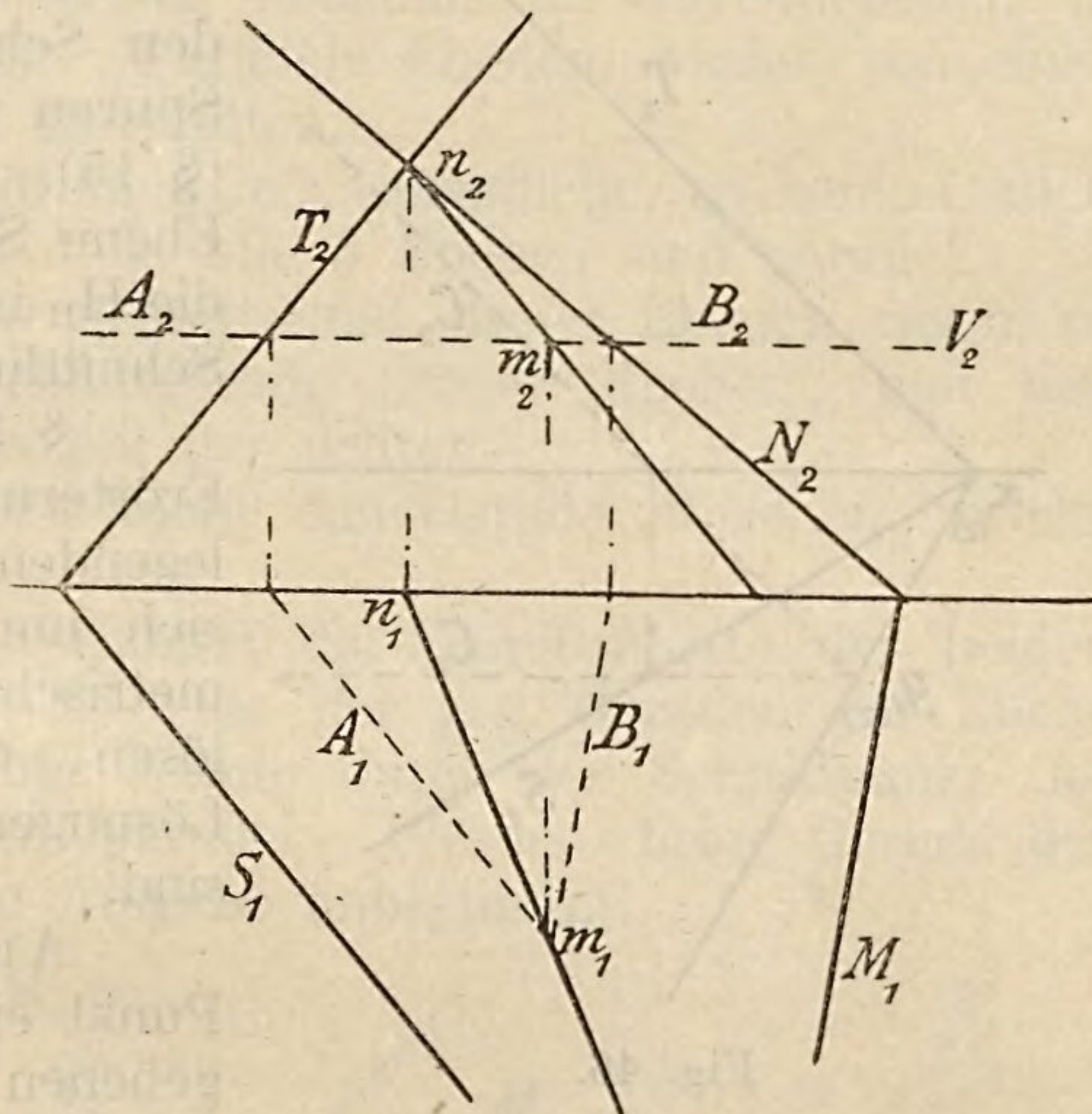


Fig. 44.

Übungsaufgaben: 1) Die Schnittlinie der Ebene abc mit Ebene ade, bde, cde, def aufzusuchen, wenn $a(0, 2, 5)$; $b(2, 4, 1)$; $c(6, -3, 4)$; $d(5, 1, 6)$; $e(2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$; $f(9, 2, 4)$.

2) Die Schnittgerade zweier gleichnamiger oder zweier ungleichnamiger Lotebenen zu finden.

3) Die Schnittgerade der Ebenen AB u. CD zu suchen, wenn $A \parallel B \parallel C \parallel D$ ist.

4) Die Schnittlinie zweier Ebenen zu suchen, deren Spuren sich im nämlichen Punkte der Achse treffen.

5) Die Schnittlinie einer beliebigen Ebene S_1T_2 mit einer durch die Achse gehenden Ebene zu suchen, wenn von letzterer noch ein Punkt a oder die Seitenspur M_3 im System T_2T_3 gegeben ist.

6) Die Schnittlinie zweier Ebenen zu

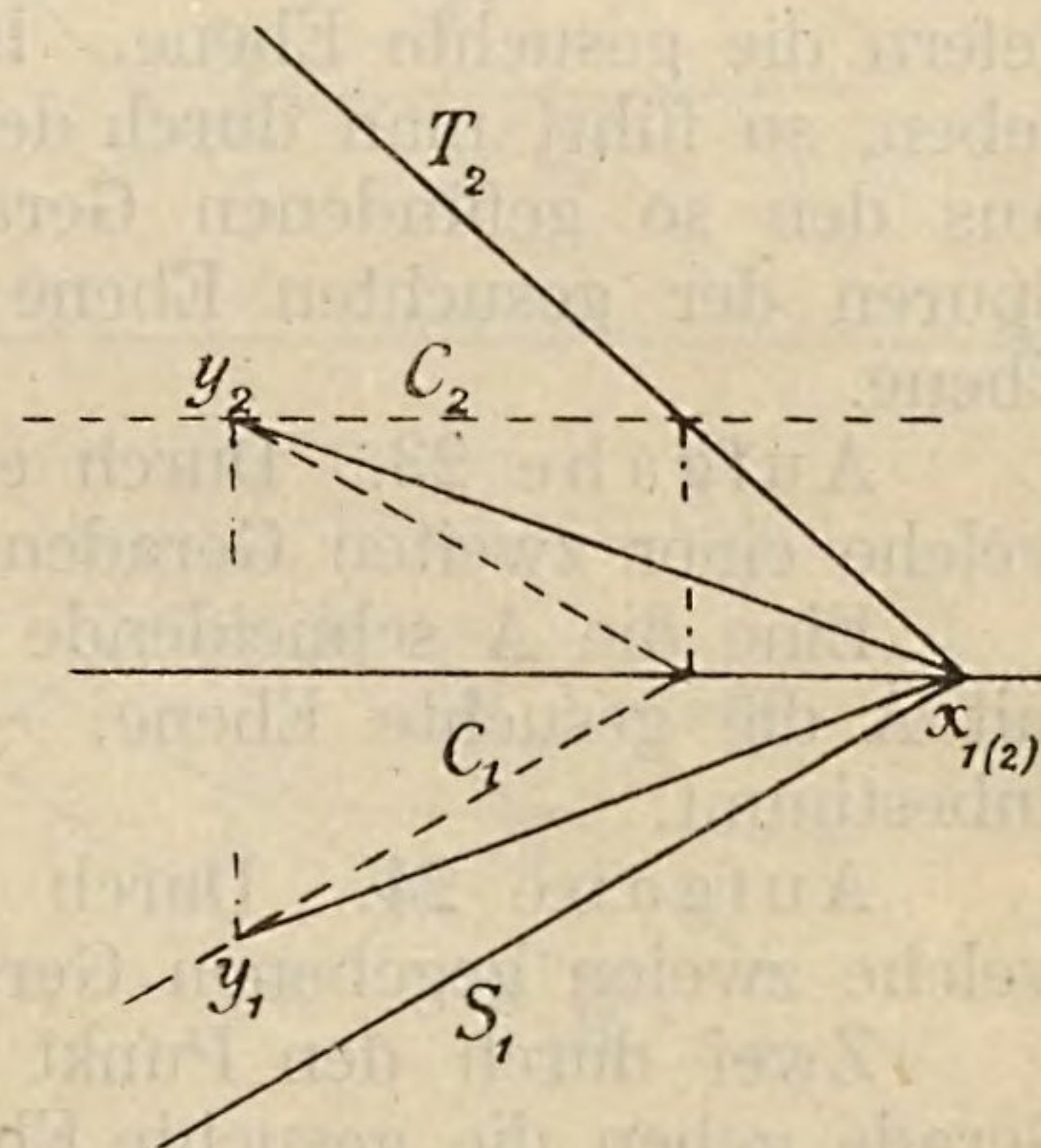


Fig. 45.

*) Das hier eingeschlagene Verfahren lässt sich selbstverständlich in allen erörterten Fällen anwenden.

suchen, von welchen die eine durch zwei der H_I parallele, die andere durch zwei der H_{II} parallele Gerade gegeben ist. (Vergleiche Aufg. 18, Zus. 2.)

Aufgabe 20. Die Schnittlinie einer Ebene S_1T_2 mit der H_I zu suchen,

Diese ist eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der gleichnamigen Spuren x (Fig. 45) geht und ihre Risse sind gleichgeneigt zur Achse (§ 15). Eine beliebige Gerade C der Ebene S_1T_2 liefert nach Aufg. 17 den Schnittpunkt y_1y_2 mit der Halbierebene; xy ist die gesuchte Schnittgerade.

Aufgabe 21. Die Schnittlinie einer Ebene S_1T_2 mit H_{II} zu finden.

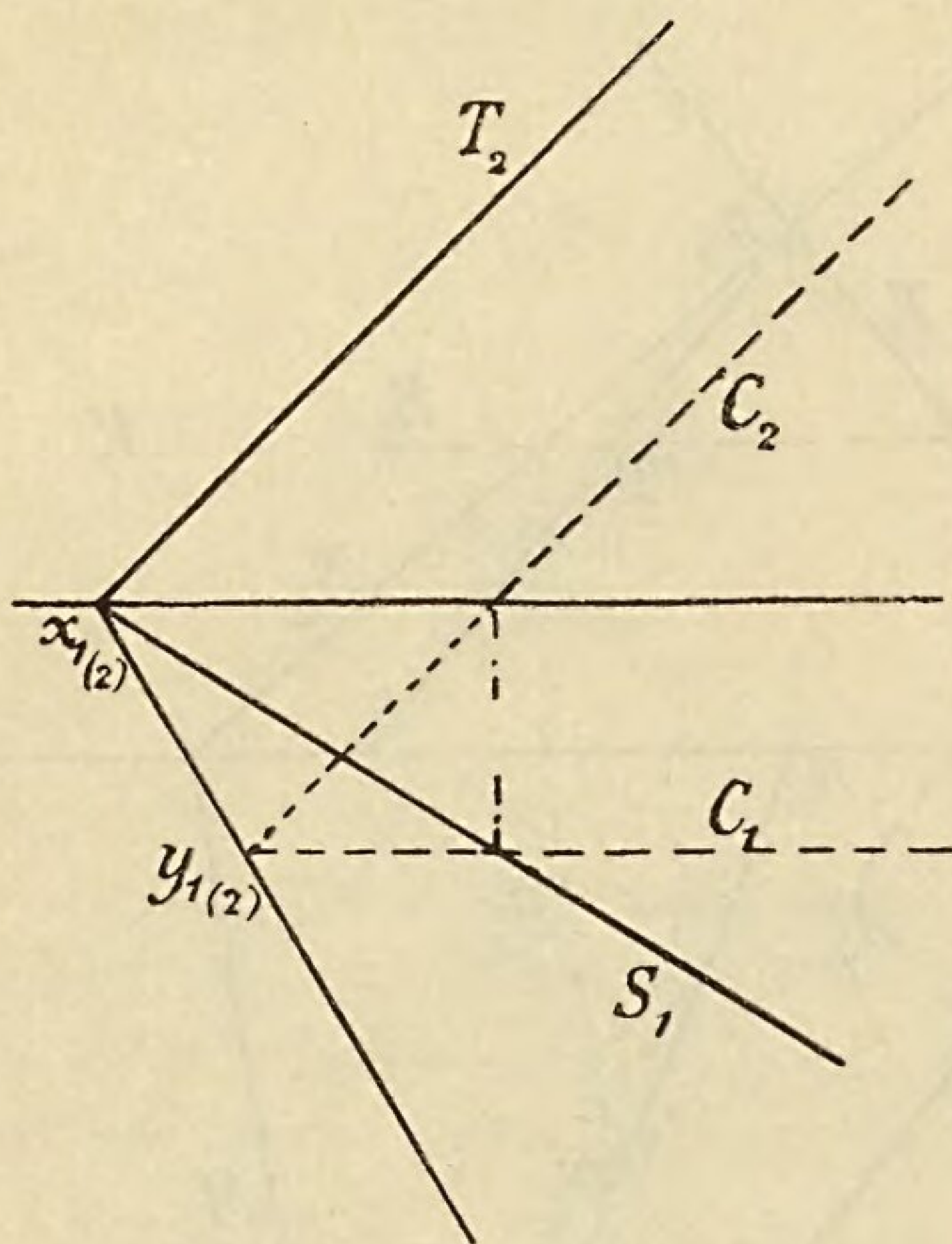


Fig. 46.

Zwei Gerade, welche durch den gegebenen Punkt parallel zweien sich schneidenden Geraden der gegebenen Ebene laufen, liefern die gesuchte Ebene. Ist die Ebene durch ihre Spuren gegeben, so führt man durch den gegebenen Punkt die Spurparallelen. Aus den so gefundenen Geraden ergeben sich, wenn nötig, die Spuren der gesuchten Ebene parallel den Spuren der gegebenen Ebene.

Aufgabe 23. Durch eine Gerade (A) eine Ebene zu legen, welche einer zweiten Geraden (B) parallel ist.

Eine die A schneidende und zu B parallele Gerade bestimmt mit A die gesuchte Ebene. — Ist $A \parallel B$, dann wird die Aufgabe unbestimmt.

Aufgabe 24. Durch einen Punkt eine Ebene zu führen, welche zweien gegebenen Geraden parallel ist.

Zwei durch den Punkt den geg. Geraden parallel gezogene Gerade geben die gesuchte Ebene. — Die Aufgabe wird unbestimmt, wenn die geg. Geraden selbst parallel sind.

Aufgabe 25. Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zweien geg. Ebenen parallel läuft.

Die verlangte Gerade ist parallel der Schnittlinie der beiden

Dieselbe geht wieder durch den Schnittpunkt x (Fig. 46) der Spuren und ihre Risse decken sich (§ 15). Die beliebige Gerade C der Ebene S_1T_2 schneidet nach Aufg. 18 die H_{II} in y_1y_2 ; xy ist die gesuchte Schnittlinie.

§ 32. Nach den vorstehenden Erörterungen und den beiden grundlegenden Aufgaben 16 u. 19 lassen sich nun die gewöhnlichen stereometrischen Aufgaben ohne Mühe lösen, weshalb im Folgenden die Lösungen zumeist nur angedeutet sind.

Aufgabe 22. Durch einen Punkt eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene zu legen.

Ebenen. Sind diese selbst parallel, so wird die Aufgabe unbestimmt.

Aufgabe 26. Die gegenseitige Lage dreier gegebener Ebenen zu untersuchen.

Man verschaffe sich die Schnittlinien je zweier Ebenen. Diese drei Schnittlinien können nun einen Punkt gemeinsam haben, welcher dann der Schnittpunkt der drei Ebenen ist; oder sie können einander parallel werden (die drei Ebenen begrenzen dann einen prismatischen Raum), oder sie können in eine einzige zusammenfallen.

Sind zwei der Ebenen parallel oder fällt eine der 3 Schnittlinien ins Unendliche, so haben die anderen beiden Schnittlinien ihre Schnittpunkte mit der ersten ebenfalls im Unendlichen d. h. sie werden einander parallel. (Parallele Ebenen werden von einer dritten in parallelen Linien geschnitten.)

Fallen zwei der Schnittlinien in's Unendliche, so kommt auch die dritte dorthin zu liegen d. h. alle 3 Ebenen sind parallel.

Um den gemeinsamen Schnittpunkt dreier Ebenen rasch zu finden, suche man die Schnittgerade zweier Ebenen, und den Schnittpunkt dieser Geraden mit der dritten.

Aufgabe 27. In einer Ebene eine Gerade zu ziehen, welche zwei geg. Gerade schneidet.

Die gesuchte Gerade verbindet die Schnittpunkte der beiden Geraden und der Ebene. — Ist eine der geg. Geraden der Ebene parallel, so geht die gesuchte Gerade durch den Schnittpunkt der zweiten Geraden der ersten parallel. Werden beide Gerade der Ebene parallel, dann ist die Aufgabe unbestimmt.

Aufg. 28. Durch einen Punkt (a) eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene Gerade (B) schneidet und zu einer gegebenen Ebene (CD) parallel (Fig. 47) ist.

Die gesuchte Gerade muss, um mit Ebene CD parallel zu werden, in einer durch a zu dieser Ebene parallel geführten Ebene MN liegen, und da sie B schneiden soll, durch den Schnittpunkt b von B mit dieser Parallelebene gehen. — Ist die gegebene Gerade B der Ebene CD parallel, so wird die Aufgabe un-

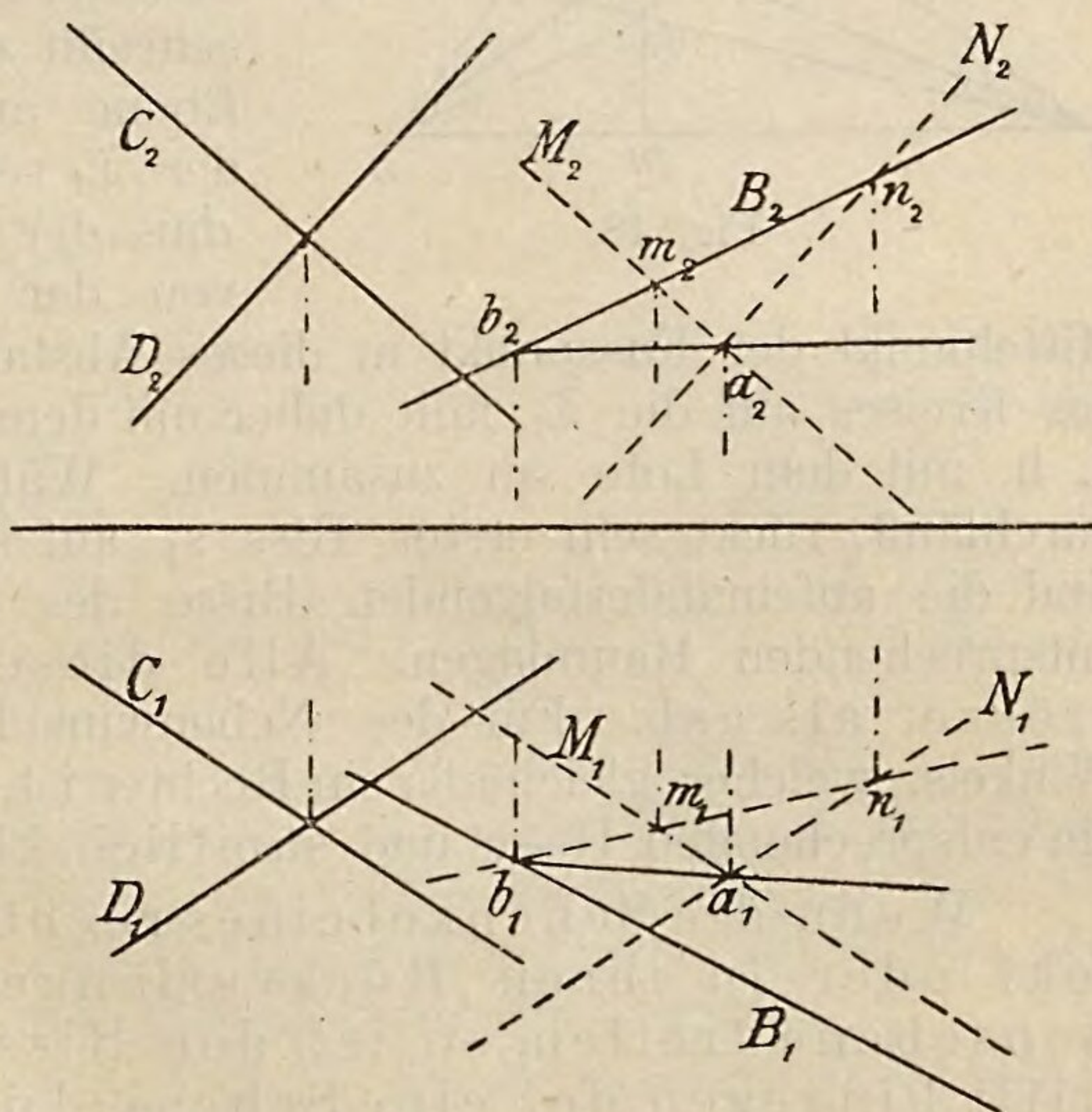


Fig. 47.

möglich, fällt sie dagegen in die Parallelebene MN , unbestimmt.

Aufgabe 29. Durch einen gegebenen Punkt (a) eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade (C, D) schneidet.

Damit die verlangte Gerade die C treffe, muss sie in der Ebene aC verlaufen, und da sie auch D schneiden soll, durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit Ebene aC gehen. — Würde man D mit Ebene aC parallel finden, so wäre die Aufgabe unmöglich, fiel D in Ebene aC , unbestimmt.

Anmerk. Lässt man den Punkt a eine beliebige Gerade durchlaufen, so liefert die Aufgabe eine ununterbrochene Folge von Geraden, welche drei windschiefe Geraden schneiden.

Aufgabe 30. Eine Gerade zu zeichnen, welche von 3 gegebenen Geraden zwei (A u. B) schneidet und zur dritten (C) parallel ist.

Damit die gesuchte Gerade A schneidet und zu C parallel werde, muss sie in der durch A zu C parallel gehenden Ebene liegen, und da sie auch B schneiden soll, durch den Schnittpunkt der B mit der Parallelebene gehen. — Wird B dieser Ebene parallel, so ist die Aufgabe unmöglich, fällt B in die Ebene, unbestimmt.

Zusatz: Man suche die vorstehenden Aufgaben auch für die Fälle zu lösen, wo eine oder mehrere der gegebenen Geraden und Ebenen zu „gelehnten“ werden.

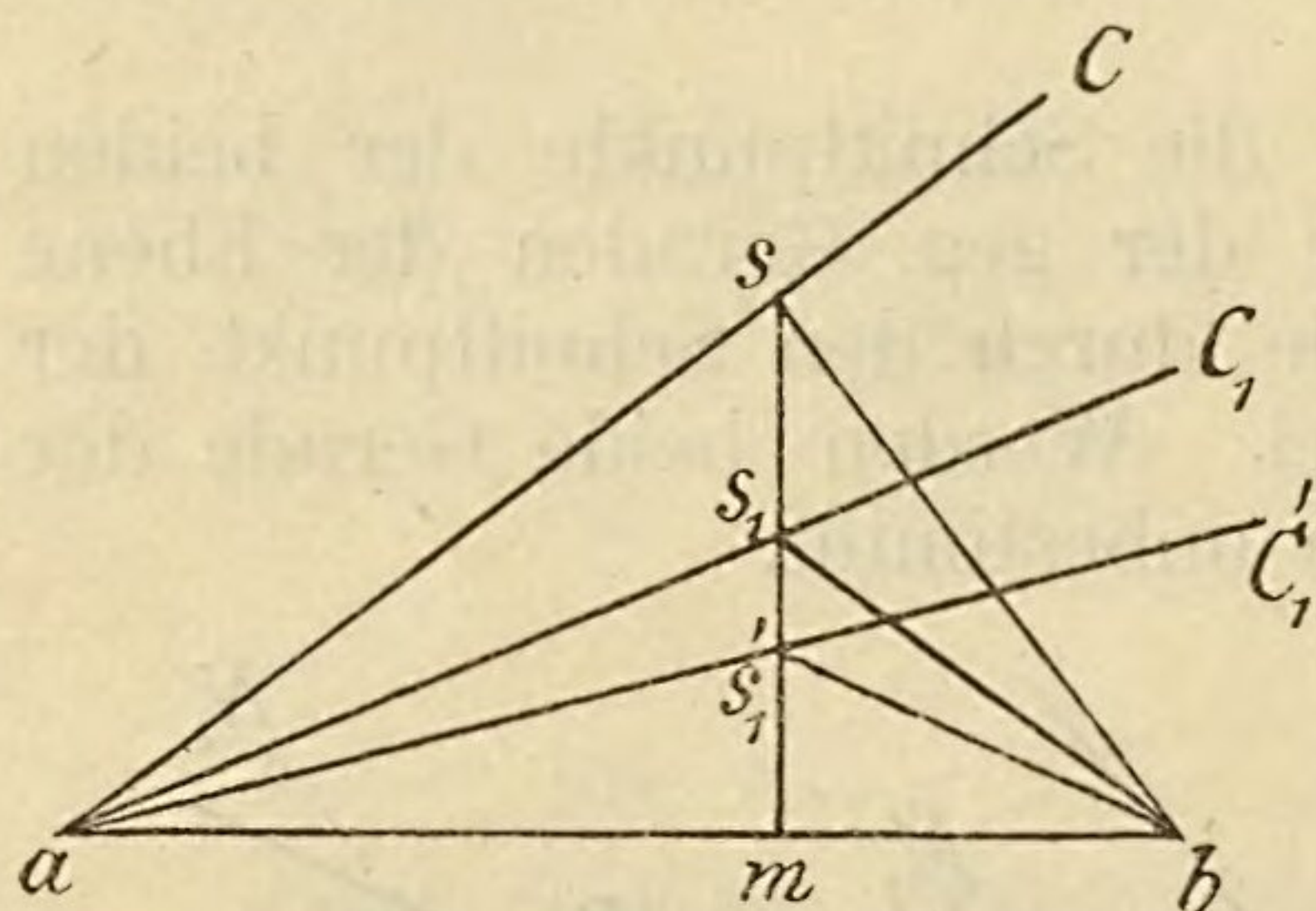


Fig. 48.

§ 33. Die senkrechte Lage zweier Geraden. Ein beliebiges, etwa in $\mathfrak{T}_1$ liegendes, rechtwinkliges Dreieck asb (Fig. 48) werde um seine Hypotenuse als Drehachse räumlich gedreht. Der Scheitel s des rechten Winkels beschreibt dabei einen Kreis, dessen Ebene auf der Hypotenuse und der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, dessen Radius der Abstand sm des Scheitels von der Hypotenuse und dessen

Mittelpunkt der Fusspunkt m dieses Abstandes ist. Die Projektion des Kreises auf die $\mathfrak{T}_1$ fällt daher mit dem ersten Riss seiner Ebene d. h. mit dem Lote sm zusammen. Während nun s den Kreis durchläuft, rückt sein erster Riss s_1 auf sm fort und as_1b , $as_1'b$ sind die aufeinanderfolgenden Risse des rechten Winkels für die entsprechenden Raumlagen. Alle diese Winkel sind aber grösser als asb . Für den Nebenwinkel bsc des ursprünglichen Winkels, welcher gleichfalls ein Rechter ist, sind bs_1c_1 , $bs_1'c_1'$, u. s. w. die entsprechenden Risse und sämtlich kleiner als bsc . Daher:

Wenn die Schenkel eines rechten Winkels beide direkt oder in ihren Rückverlängerungen die Projektionsebene treffen, so ist der Riss desselben stumpf; trifft hingegen der eine Schenkel die Projektionsebene direkt, der andere in seiner Verlängerung, so ist der Riss des rechten Winkels spitz.

Bei unverändertem s rücke a auf ab nach m hin, dann entfernt sich auch b immer weiter von m ; ist a in m angekommen,

so ist b auf ab ins Unendliche gefallen oder $sb \parallel ab$ geworden (Fig. 49). Bei der Drehung bleibt nun jeder Riss von sb z. B. $s_1b_1 \parallel ab$, oder der Winkel as_1b_1 ist ein rechter geblieben; daher:

Läuft von den Schenkeln eines rechten Winkels einer der Projektionsebene parallel, so ist auch der Riss des rechten Winkels ein rechter.

Allgemein: Die Risse zweier aufeinander senkrechter Geraden sind nur dann wieder aufeinander senkrecht, wenn wenigstens eine der Geraden zur Projektionsebene parallel ist.

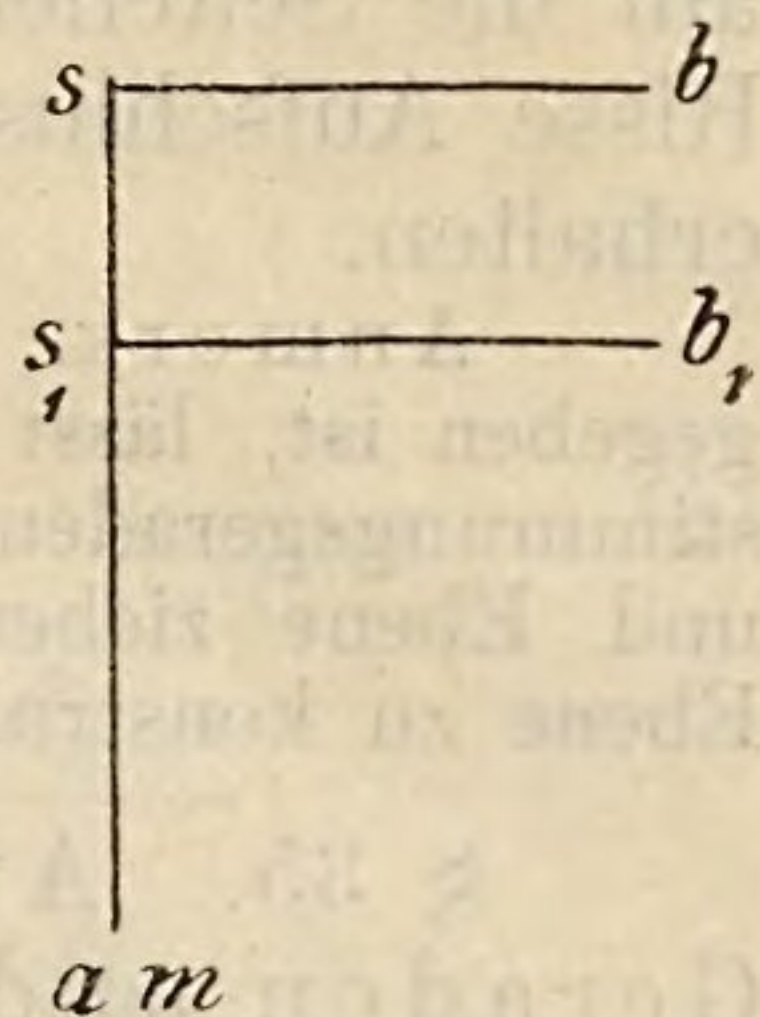


Fig. 49.

§ 34. Die senkrechte Stellung einer Geraden und einer Ebene.

Die Gerade A (Fig. 50a) stehe auf der Ebene PQ , welche die Projektionsebene $\mathfrak{T}_1$ in S_1 schneiden soll, senkrecht. Die durch die Gerade gelegte projizierende Ebene ist dann auf der Tafel und der gegebenen Ebene, oder auf deren Schnittlinie S_1 senkrecht, woraus folgt, dass diese letztere, die Spur der gegebenen Ebene, auf dem Riss A_1 der Geraden senkrecht ist. Daher:

Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so stehen die Risse der Geraden auf den gleichnamigen Spuren der Ebene senkrecht (Fig. 50b).

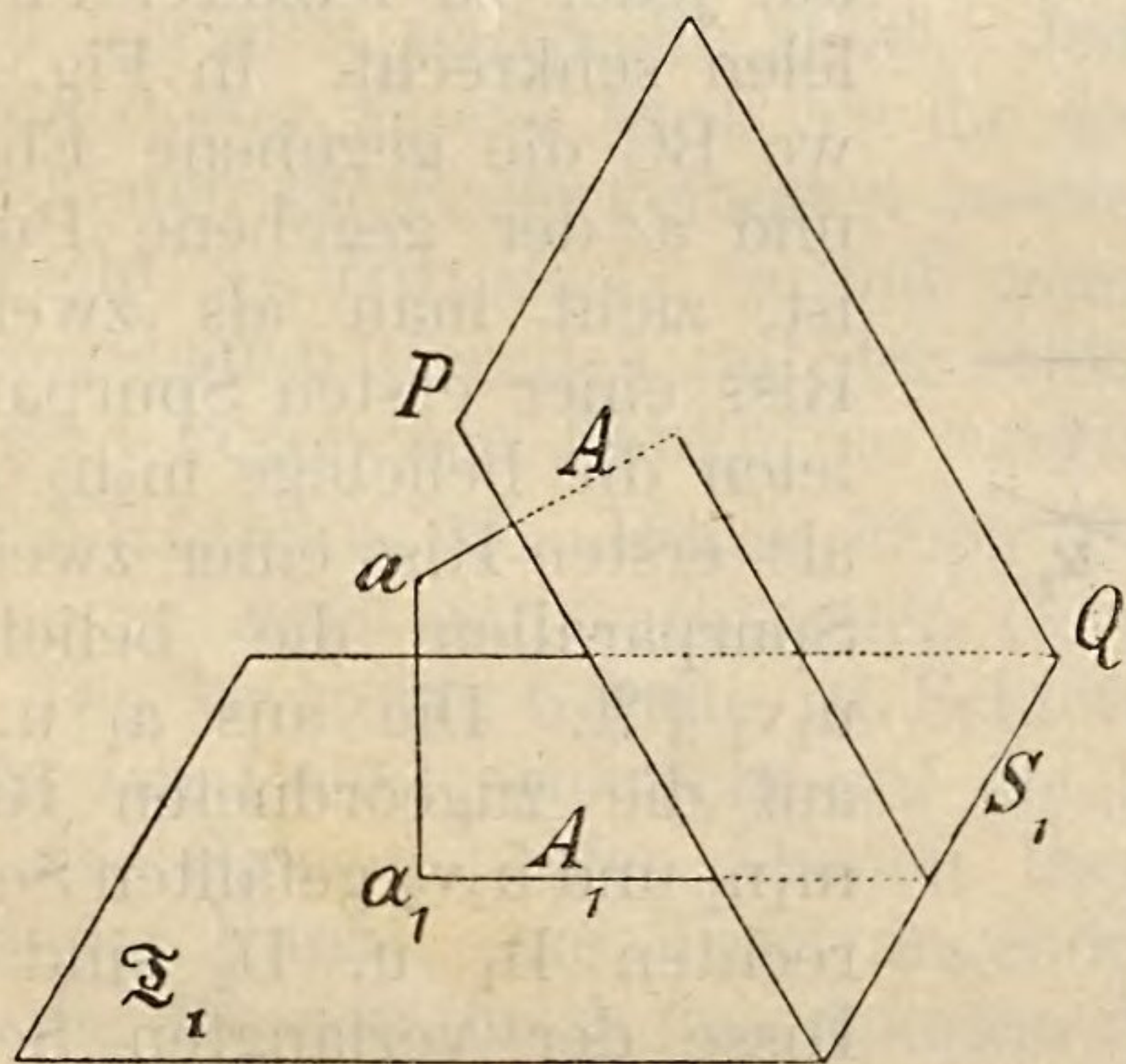


Fig. 50 a

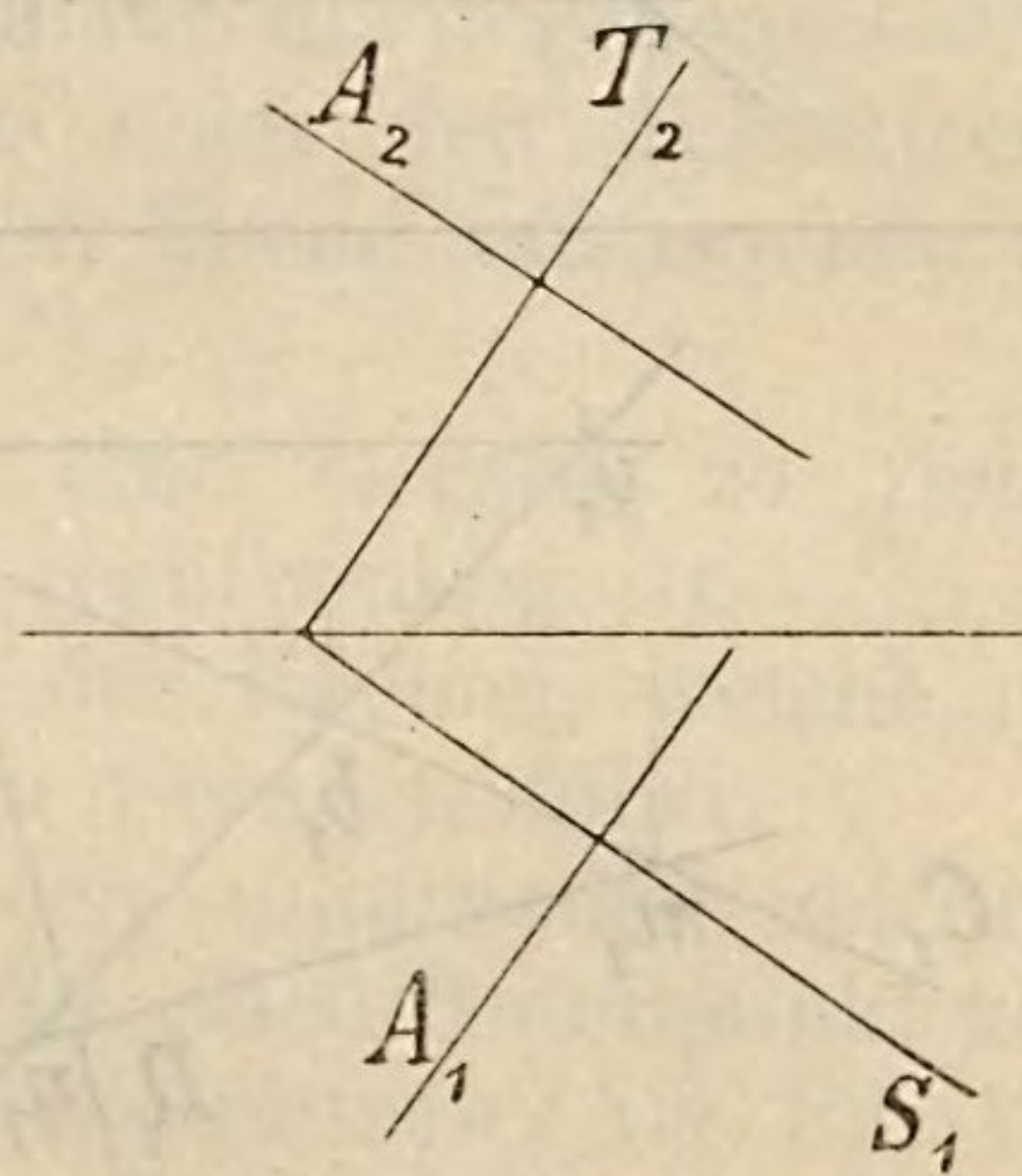


Fig. 50 b.

Sind umgekehrt die Risse einer Geraden zu den gleichnamigen Spuren einer Ebene senkrecht, und man legt durch jeden Riss die ihm eigene Lotebene, so stehen beide Lotebenen auf der Ebene oder ihrer Schnittlinie, der Raumgeraden, senkrecht. Daher:

Sind die Risse einer Geraden auf den Spuren einer Ebene senkrecht, so steht die Gerade selbst auf der Ebene senkrecht.

Eine Ausnahme von letzterem Satz findet dann statt, wenn die beiden Lotebenen, welche durch die Risse der Geraden gelegt

werden, in eine zusammenfallen, d. h. wenn die Gerade und die Ebene „gelehnt“ sind. In diesem Falle hat man Gerade und Ebene auf die Seitenebene zu projizieren, um aus der Stellung der dritten Risse Aufschluss über die gegenseitige Lage der Raumgebilde zu erhalten.

Anmerk. Bei derjenigen Ebene, welche durch zwei allgemeine Gerade gegeben ist, lässt sich aus den Rissen einer dritten Geraden und der zwei Bestimmungsgeraden kein sicherer Schluss auf die wirkliche Stellung von Gerade und Ebene ziehen, es sind vielmehr erst die Spuren oder Spurparallelen der Ebene zu konstruieren.

§ 35. Aufgaben über die senkrechte Stellung von Geraden und Ebenen.

Aufgabe 31. Aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Ebene eine Senkrechte zu fällen.

Die Risse der geforderten Geraden sind die Senkrechten, welche man aus den Rissen des Punktes auf die gleichnamigen Spuren der Ebene fällt.

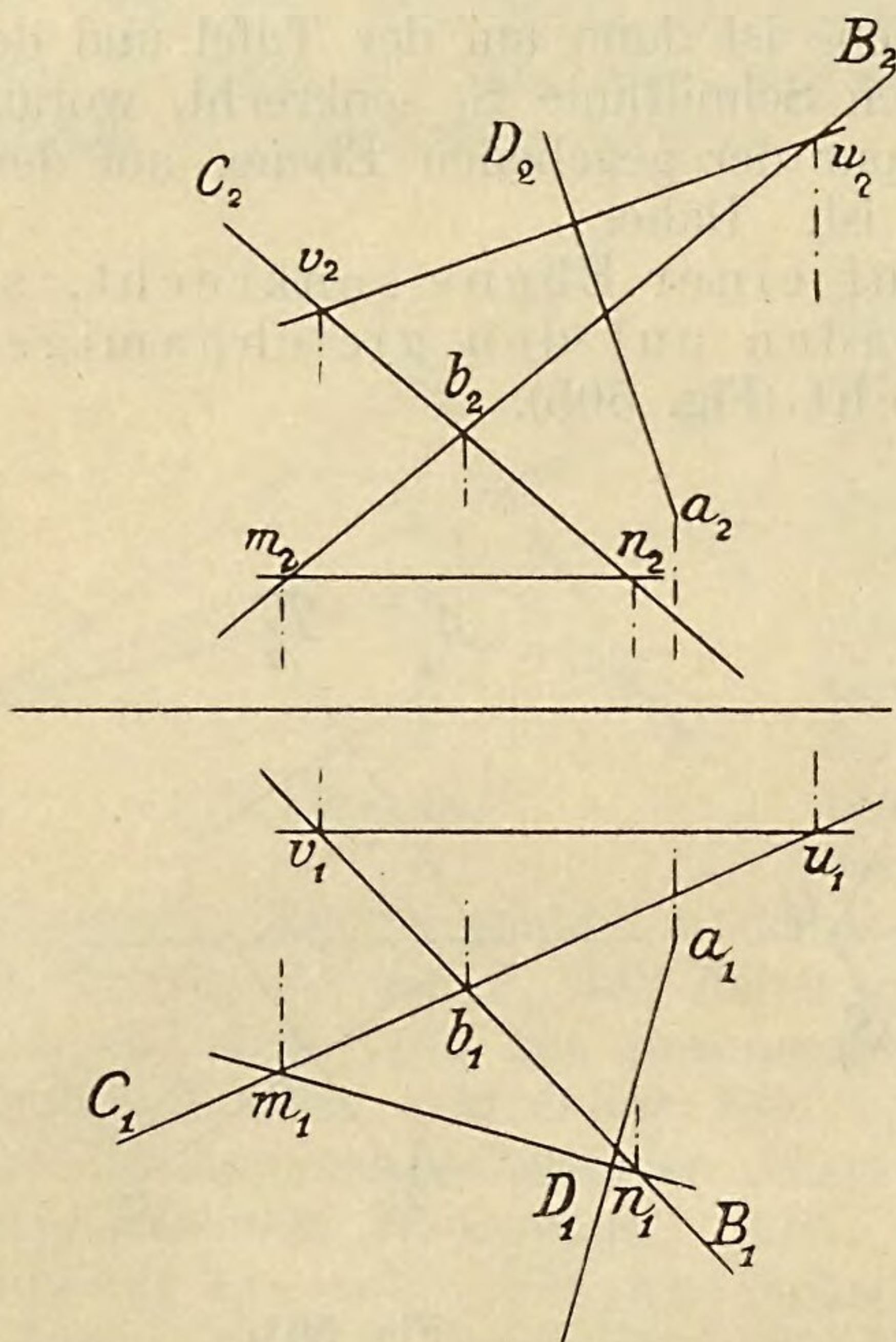


Fig. 51.

recht zu einer Geraden zu führen.

Die Spuren oder Spurparallelen der gesuchten Ebene stehen auf den gleichnamigen Rissen der Geraden senkrecht. Liegt daher der gegebene Punkt in einer der Tafeln, so geht durch ihn schon die gleichnamige Ebenenspur senkrecht zum Riss der Geraden; gehört er aber keiner der Tafeln an (a_1a_2 Fig. 52), so sind die aus a_1 auf G_1 und aus a_2 auf G_2 gezogenen Senkrechten A_1 u. B_2 nur die gleichnamigen Risse von Spurparallelen, deren zugeordnete Risse

Sind die Spuren schwer erhältlich oder verlaufen sie ganz oder teilweise ausserhalb des Zeichenblattes, so benütze man passende Spurparallelen, denn die Senkrechte zur Spur steht auch auf jeder zu letzterer Parallelen senkrecht. In Fig. 51, wo BC die gegebene Ebene und a der gegebene Punkt ist, zieht man als zweiten Riss einer ersten Spurparallelen die beliebige $m_2n_2 \parallel \mathcal{H}$, als ersten Riss einer zweiten Spurparallelen die beliebige $u_1v_1 \parallel \mathcal{H}$. Die aus a_1 u. a_2 auf die zugeordneten Risse m_1n_1 und u_2v_2 gefällten Senkrechten D_1 u. D_2 sind die Risse der verlangten Senkrechten.

Aufgabe 32. Durch einen Punkt eine Ebene senk-

A_2 u. B_1 dann der Achse parallel laufen. Durch sie ist nun die gesuchte Ebene bestimmt und sind deren Spuren im Bedürfnisfalle leicht nachzubringen.

Aufgabe 33. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Man fälle aus einem beliebigen Punkte der Geraden eine Senkrechte auf die gegebene Ebene, dann bestimmt diese mit der gegebenen Geraden die gesuchte Ebene. — Fielen gegebene Gerade und Senkrechte zusammen, so wäre die Aufgabe unbestimmt.

Aufgabe 34. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden einen rechten Winkel bildet.

Man lege durch den Punkt eine Ebene, welche auf der gegebenen Geraden senkrecht steht. Jede durch den Punkt gehende Gerade dieser Ebene kann als die gesuchte genommen werden. Soll unter ihnen diejenige gefunden werden, welche die gegebene Gerade senkrecht schneidet, so hat man nur noch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit der senkrechten Ebene aufzusuchen und mit dem gegebenen Punkte zu verbinden.*)

Aufgabe 35. Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zu zwei sich kreuzenden Geraden rechtwinklig ist.

Die verlangte Gerade ist Schnittlinie der Ebenen, welche man durch den Punkt senkrecht auf die beiden Geraden führt.

Die Spuren beider Ebenen lassen sich unmittelbar zeichnen, wenn der Punkt einer Tafel angehört. Für einen Raumpunkt kann man die Ebenen durch ihre Spurparallelen bestimmen (Afg. 32), man kann aber auch die Aufgabe für einen willkürlichen Punkt einer Tafel lösen und durch den gegebenen Punkt eine Parallele zur gefundenen Schnittlinie ziehen.

Aufgabe 36. Eine Gerade anzugeben, welche zwei sich kreuzende Gerade senkrecht schneidet.

Die geforderte Gerade ist der in der vorigen Aufgabe gefundenen parallel und soll die gegebenen Geraden schneiden, man findet sie daher mittelst Aufgabe 30.**)

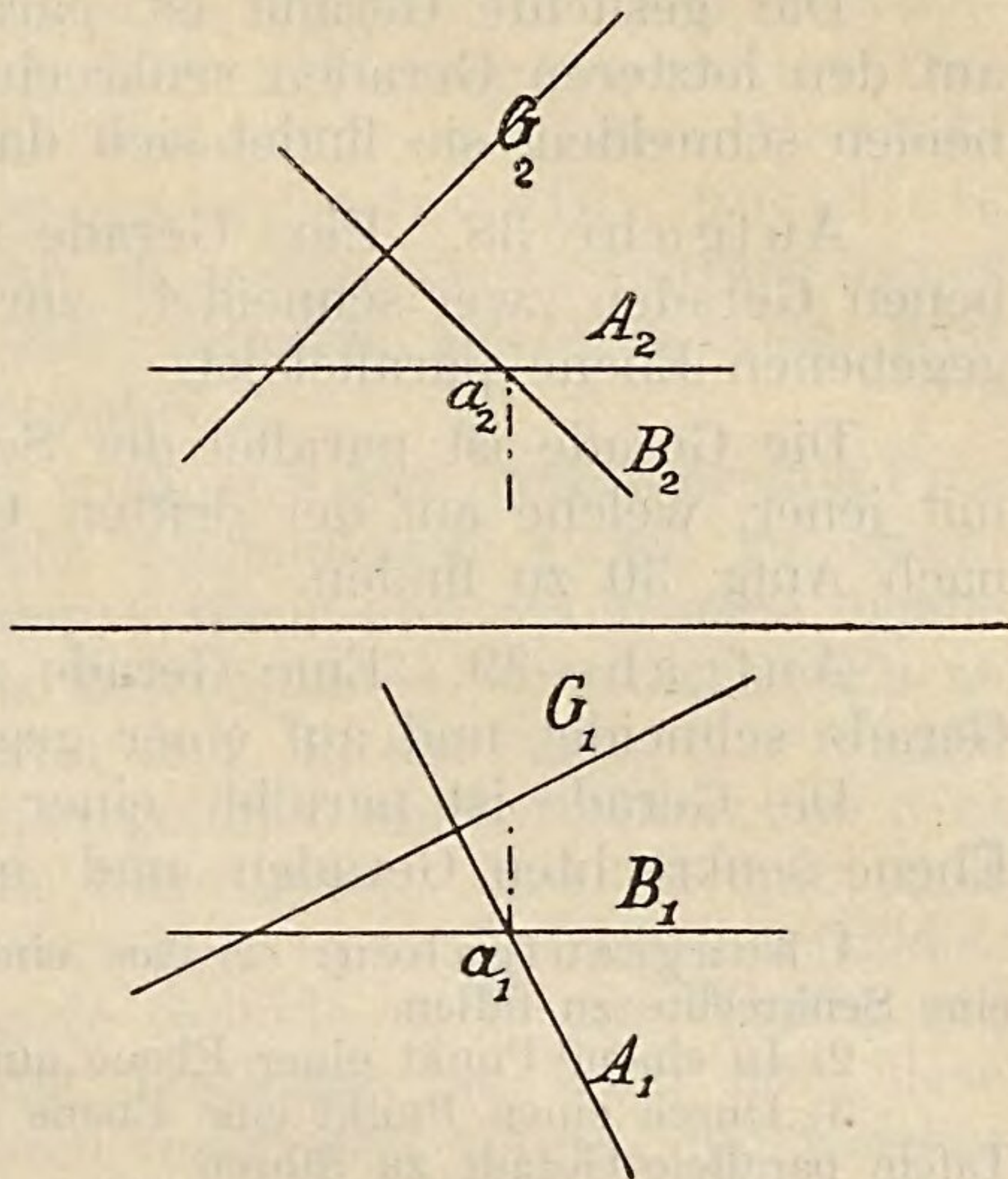


Fig. 52.

*) Eine andere Lösung dieser Aufgabe enthält § 50, Aufg. 44.
 **) „ „ „ „ „ § 52, „ 46.

Aufgabe 37. Eine Gerade zu zeichnen, welche von 4 gegebenen Geraden zwei schneidet und zu den beiden andern rechtwinklig ist.

Die gesuchte Gerade ist parallel der Schnittlinie zweier je auf den letzteren Geraden senkrechten Ebenen und soll die ersten beiden schneiden, sie findet sich daher nach Aufgabe 30.

Aufgabe 38. Eine Gerade zu suchen, welche von 3 gegebenen Geraden zwei schneidet, zur dritten rechtwinklig und einer gegebenen Ebene parallel ist.

Die Gerade ist parallel der Schnittlinie der gegebenen Ebene mit jener, welche auf der dritten Geraden senkrecht steht, daher nach Aufg. 30 zu finden.

Aufgabe 39. Eine Gerade zu finden, welche zwei gegebene Gerade schneidet und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Die Gerade ist parallel einer beliebigen auf der gegebenen Ebene senkrechten Geraden und ergibt sich mittelst Aufgabe 30.

Übungsaufgaben: 1) Aus einem Punkt auf eine gelehnte Ebene eine Senkrechte zu fallen.

2) In einem Punkt einer Ebene auf diese eine Senkrechte zu errichten.

3) Durch einen Punkt eine Ebene senkrecht auf die zu einer oder beiden Tafeln parallele Gerade zu führen.

4) Durch einen Punkt eine Ebene senkrecht auf eine gelehnte Gerade zu legen.

5) In einer gegebenen Ebene eine Gerade zu finden, welche eine gegebene Gerade schneidet und zu einer zweiten gegebenen Geraden rechtwinklig ist.

6) In einer Ebene eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene Gerade senkrecht schneidet.

7) Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche auf zwei gegebenen Ebenen senkrecht steht.

8) Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zu einer gegebenen Ebene parallel und zu einer gegebenen Geraden rechtwinklig ist.

9) Durch einen Punkt eine Ebene zu führen, welche zu einer gegebenen Geraden parallel ist und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

10) Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene Gerade schneidet und zu einer zweiten gegebenen Geraden rechtwinklig ist.

VI. Kapitel.

Gegenseitige Entfernung und Neigung von Punkten, Geraden, Ebenen.

In den Aufgaben dieses Kapitels wird es sich um die Konstruktion von Strecken und Winkeln, teils in ihren Rissen teils in ihrer wahren Grösse handeln, sodann wird umgekehrt aus den bekannten Abständen und Neigungswinkeln geometrischer Gebilde deren Lage näher anzugeben sein.

§ 36. Aus der in der Einleitung erörterten Methode der Orthogonalprojektion ergibt sich, dass ein ebenes geometrisches Gebilde mit der Projektion auf seine eigene Ebene zusammenfällt, und mit der Projektion auf eine zu seiner Ebene parallelen Ebene kongruent ist. Im letzteren Falle

bilden nämlich das gegebene Gebilde, die projizierenden Strahlen und die Projektion ein senkrechtes Prisma mit kongruenter Grund- und Deckfläche.

Handelt es sich nun um die Aufsuchung der wahren Grösse oder wirklichen Gestalt eines ebenen Gebildes, so wird man darauf bedacht sein, die Projektion des Gebildes auf seine eigene oder eine parallele Ebene herzustellen. Dadurch ist wieder die Einführung neuer Projektionsebenen, wie schon früher, geboten, jedoch in einem weit grösseren und allgemeineren Massstabe.

§ 37. Wie schon bekannt, wird jede neu einzuführende Projektionsebene mit einer der bereits vorhandenen Tafeln zu einem neuen Projektionssystem verbunden. Wenn nun das in seine eigene Ebene zu projizierende Gebilde so beschaffen ist, dass es eine Ebene nicht vollkommen bestimmt, wenn es z. B. ein Punkt, eine Gerade ist, durch welche unzählige Ebenen geführt werden können, so wird man der neuen Ebene eine solche Lage geben, dass sie mit einer der vorhandenen Tafeln ein rechtwinkliges Tafelsystem bildet. Ist aber durch das zu projizierende Gebilde, z. B. ein Winkel, ein Dreieck, eine Ebene unzweideutig bestimmt, so kann nur diese Ebene als neue Tafel mit der alten verbunden werden, mit welcher sie dann im allgemeinen ein schiefwinkliges System bilden wird.

Das Verfahren, wie man ein geometrisches Gebilde aus dem Tafelsystem $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ auf ein neues rechtwinkliges System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ oder $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$, wobei $\mathfrak{T}_3$ nicht mehr ausschliesslich die frühere Bedeutung der Seitenebene hat, überträgt, ist bereits bekannt und eingeübt (§§ 26, 27, 28). Bevor wir jedoch die Übertragung eines Gebildes in ein schiefwinkliges System betrachten können, müssen wir überhaupt erst die Projektion in einem schiefwinkligen Systeme behandeln.

§ 38. Wir stellen daher zunächst die Aufgabe, einen Punkt a im Raume (Fig. 53) in dem Systeme $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$, dessen Tafeln sich aber jetzt unter dem Winkel α schneiden, zu projizieren. Nach der Vorschrift der Orthogonalprojektion fällen wir aus a die projizierenden Lote, welche die Tafeln in den Rissen a_1 u. a_2

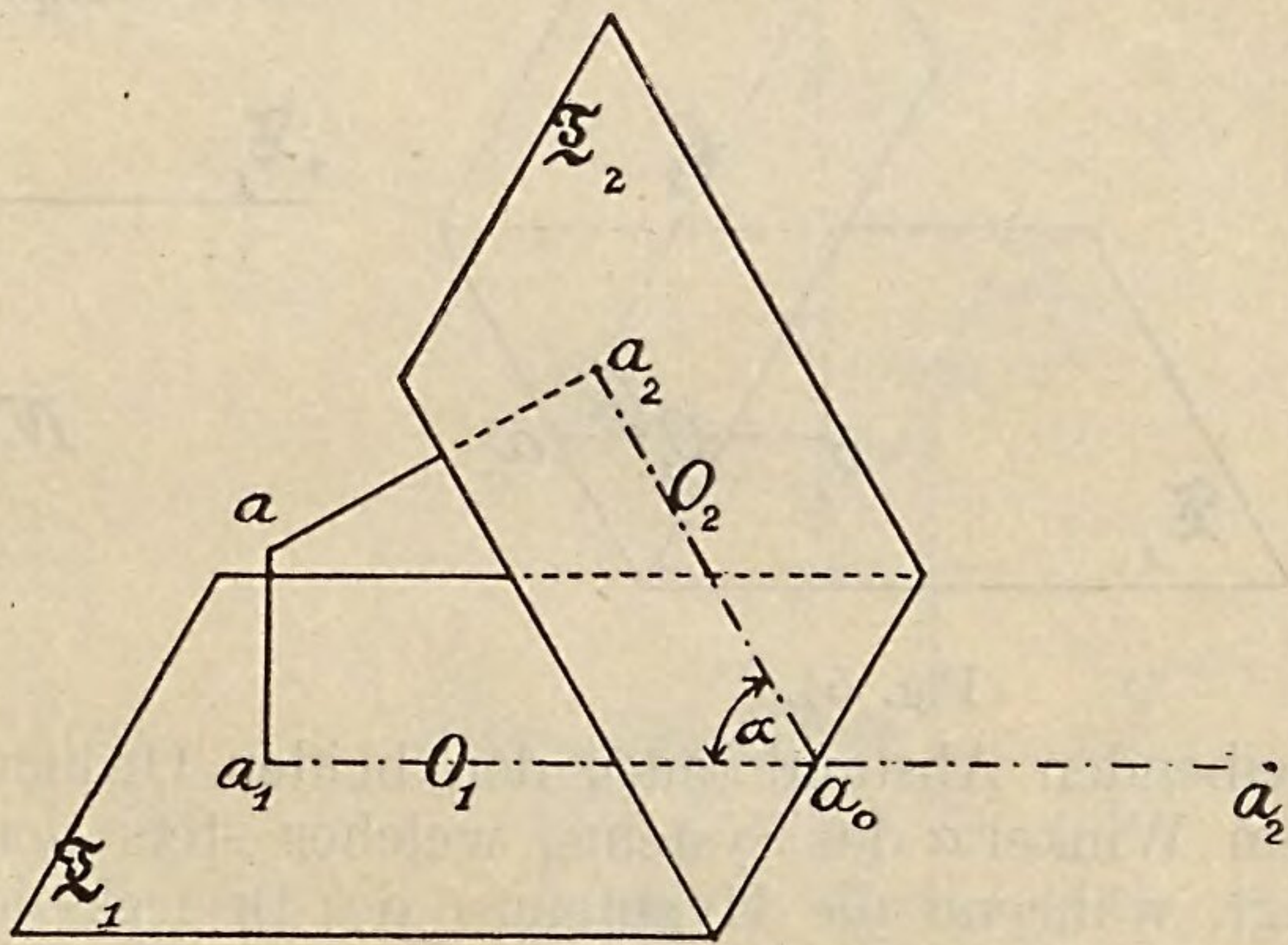


Fig. 53.

treffen. Die Ebene der projizierenden Lote steht auf beiden Tafeln und der Achse senkrecht und schneidet die Tafeln in den Geraden

a_1a_0 und a_0a_2 , welche in a_0 auf der Achse senkrecht stehen und mit den Loten aa_1 u. aa_2 das projizierende Viereck $aa_1a_0a_2$ bilden. Klappt man dann eine der Tafeln um, bis sie mit der andern zur Zeichenebene zusammenfällt, so bleiben die Geraden a_1a_0 u. a_0a_2 stets auf der Achse senkrecht und gehen schliesslich in die einzige Gerade $a_1a_0a_2$ über. Daher: Auch im schiefwinkligen Tafel-system liegen die Risse eines Punktes nach der Umklappung immer in einer zur Achse senkrechten Geraden, dem Achsenlot.

Das projizierende Viereck $a_1a_0a_2a$ (Fig. 53), dessen Seiten wieder die Abstände des Punktes von den Tafeln einerseits, und die Abstände der Risse von der Achse (Ordinaten) andererseits, vorstellen, ist nicht mehr, wie im rechtwinkligen System, ein Rechteck, sondern ein Viereck mit 2 rechten Winkeln (an den Risspunkten), mit dem Winkel α des Systems (dem Raumpunkt gegenüber) und dessen Supplement. Der Satz von der Gleichheit der Ordinaten und Abstände (§ 5) hat daher im schiefwinkligen System keine Giltigkeit, vielmehr muss zur Auffindung der fehlenden Stücke eines Punktes, namentlich seiner Ordinaten, jederzeit das projizierende Viereck erst konstruiert werden, zu dessen Bestimmung fünf Stücke (ausser den beiden rechten Winkeln noch drei) erforderlich sind.

Nur wenn irgend ein Abstand des Punktes verschwindet, d. h. wenn der zu projizierende Punkt in einer der Tafeln selbst liegt, geht das Viereck in ein rechtwinkliges Dreieck aa_1a_0 (Fig. 54) über. Dasselbe besteht aus dem übrig-

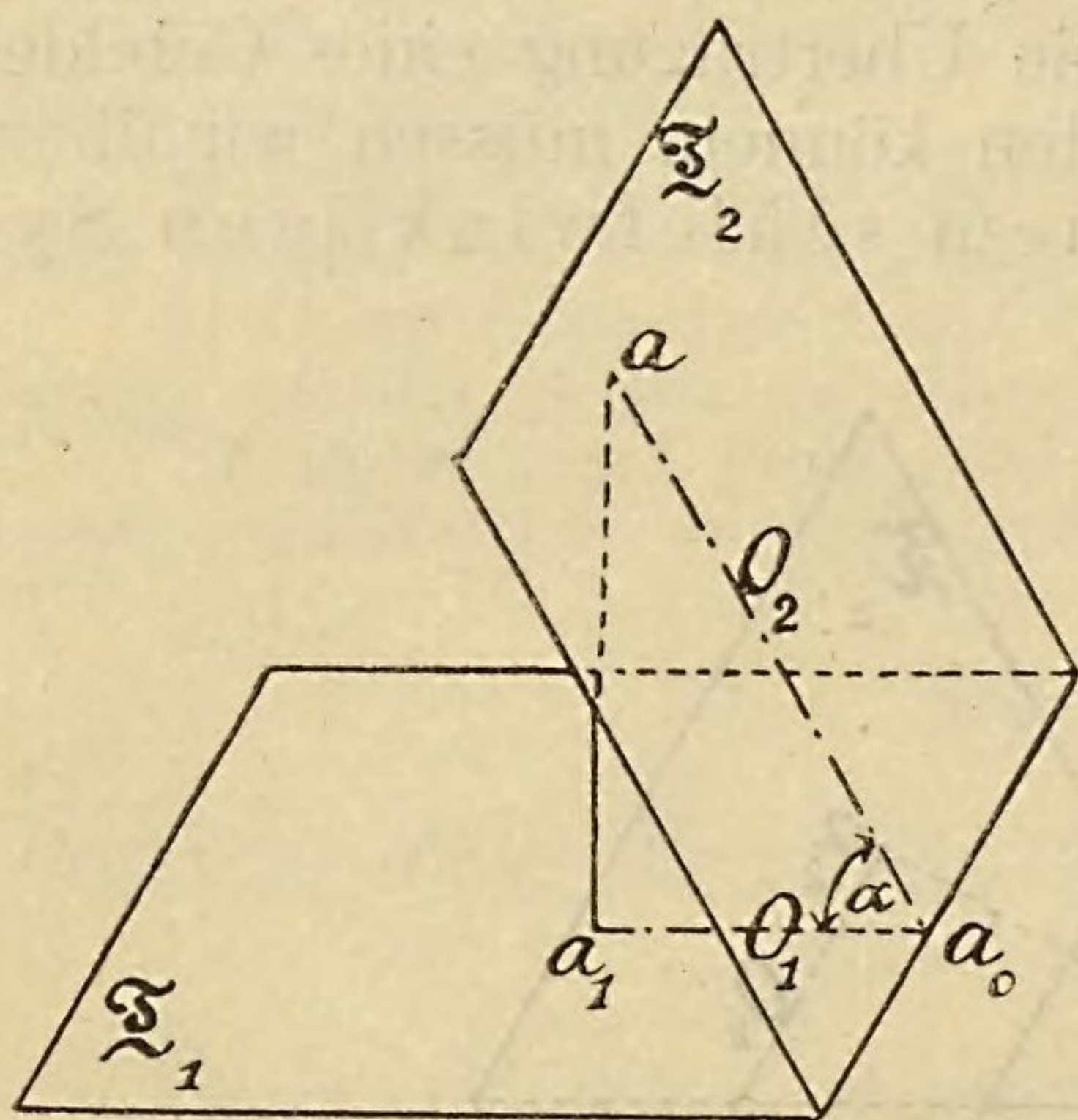


Fig. 54.

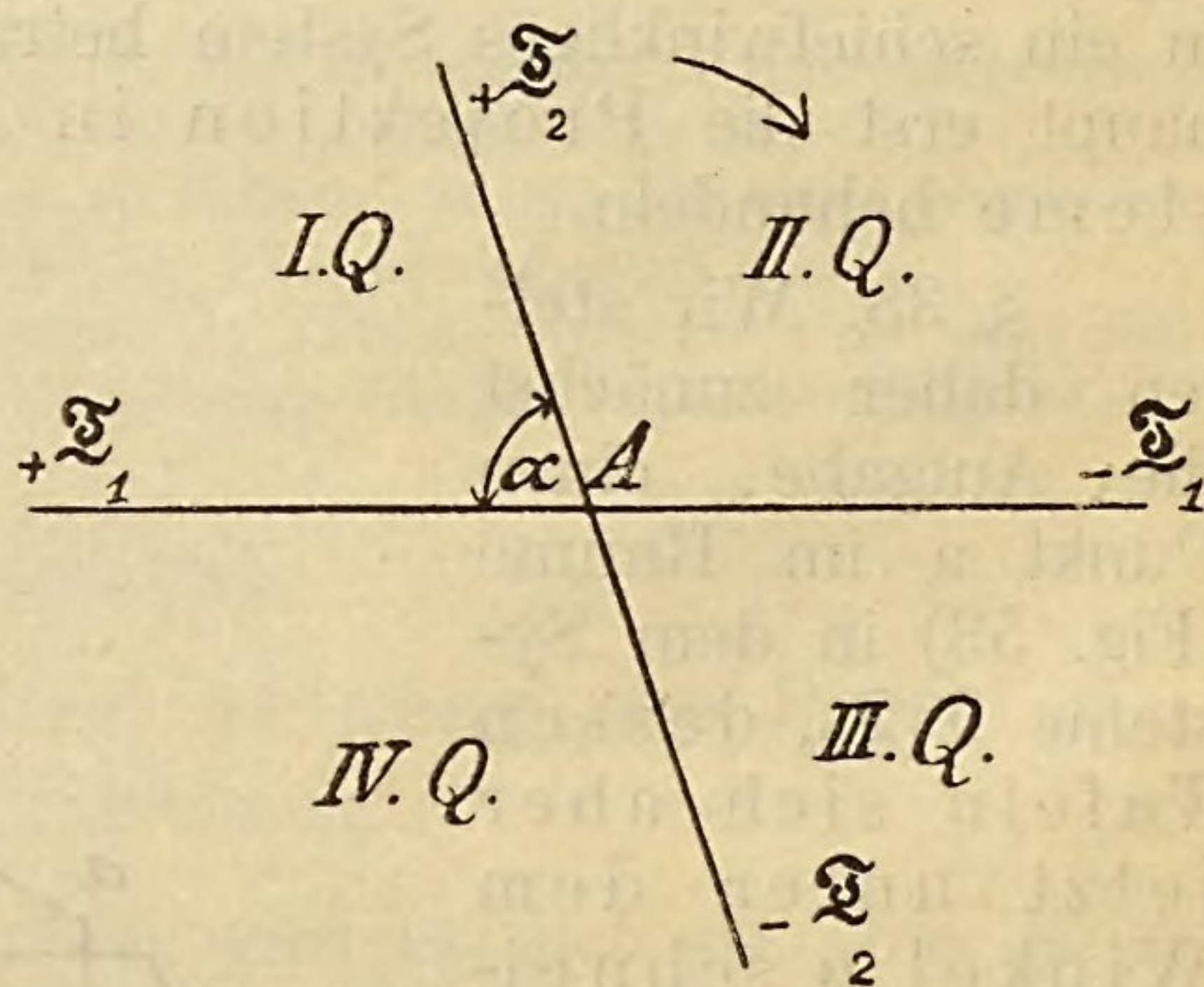


Fig. 55.

bleibenden Abstand (aa_1), den beiden Ordinaten (a_1a_0 u. a_0a_2) und dem Winkel α des Systems, welcher stets dem Abstände gegenüber liegt, während die Hypotenuse des Dreiecks jene Ordinate ist, welche mit der Tafel des Punktes gleichen Zeiger hat. Zur Konstruktion dieses projizierenden Dreiecks genügen drei Stücke (ausser dem rechten Winkel noch zwei).

§ 39. Die beiden Tafeln des schiefwinkligen Systems teilen den unendlichen Raum gleichfalls in 4 Teile, die auch hier Qua-

dranten heissen mögen, da sie von denselben Tafelteilen begrenzt sind, wie jene des rechtwinkligen Systems (Fig. 55.) Die Umklappung der Tafeln vollzieht man gewöhnlich so, dass der positive Teil der einen Tafel mit dem negativen der andern zur Deckung gelangt.

Die Fig. 56 [zeigt die projizierenden Vierecke des Punktes a in den 4 Quadranten für ein System, dessen positive Tafeln den Winkel α einschliessen. Die eingetragenen Vorzeichen der Ordinaten und Abstände sind genau nach den Regeln des rechtwinkligen Systems (§ 7) abgeleitet worden. Bemerkenswert sind die Fälle, in welchen das Viereck zu einem überschlagenen wird, von dessen Seiten zwei gegenüberliegende sich schneiden, wie in Fig. 57 für die Punkte b u. c , welche beide im II. Quadranten liegen.

Die Figuren 58 zeigen die rechtwinkligen Dreiecke unter der Annahme, dass der zu projizierende

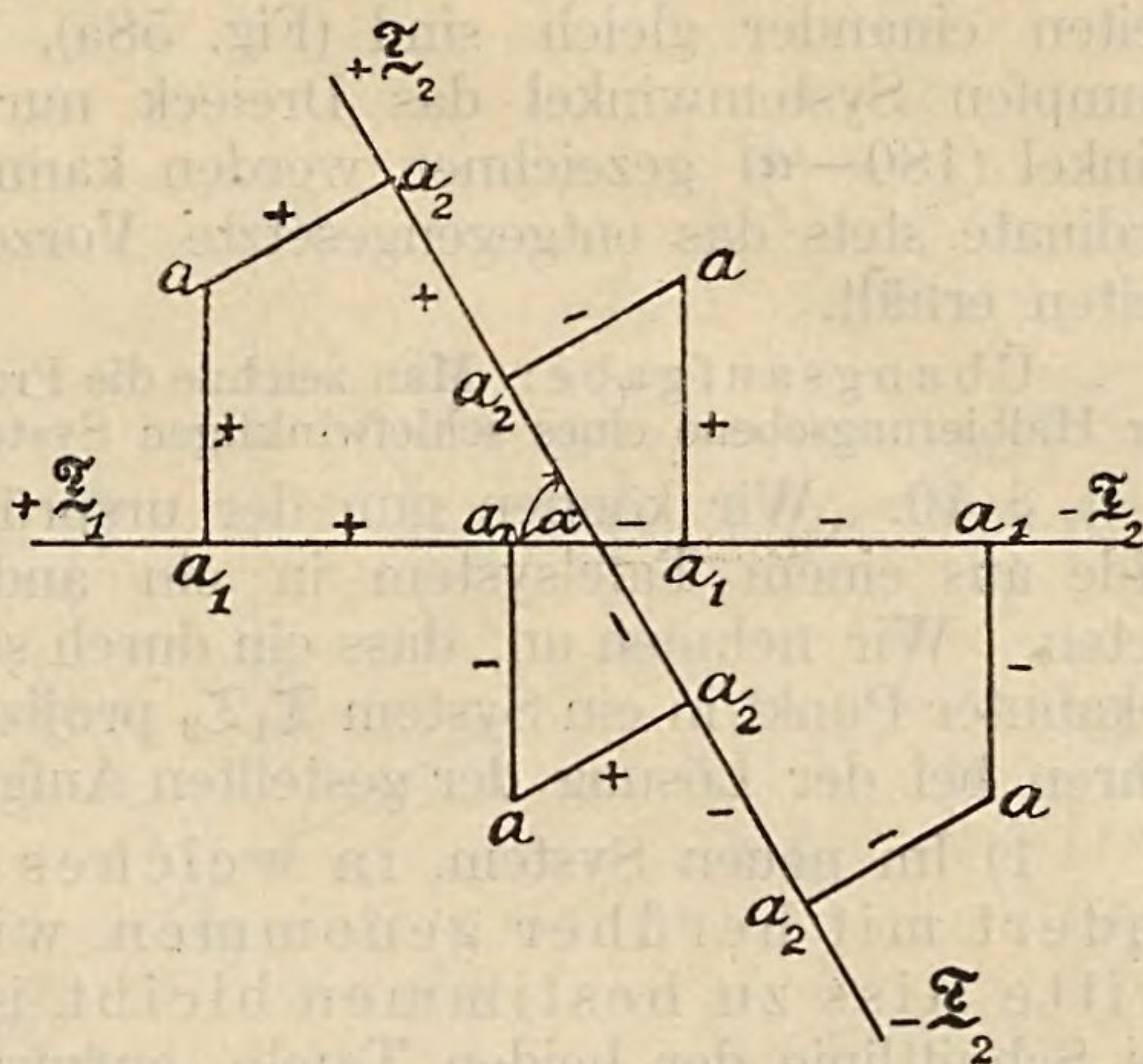


Fig. 56.

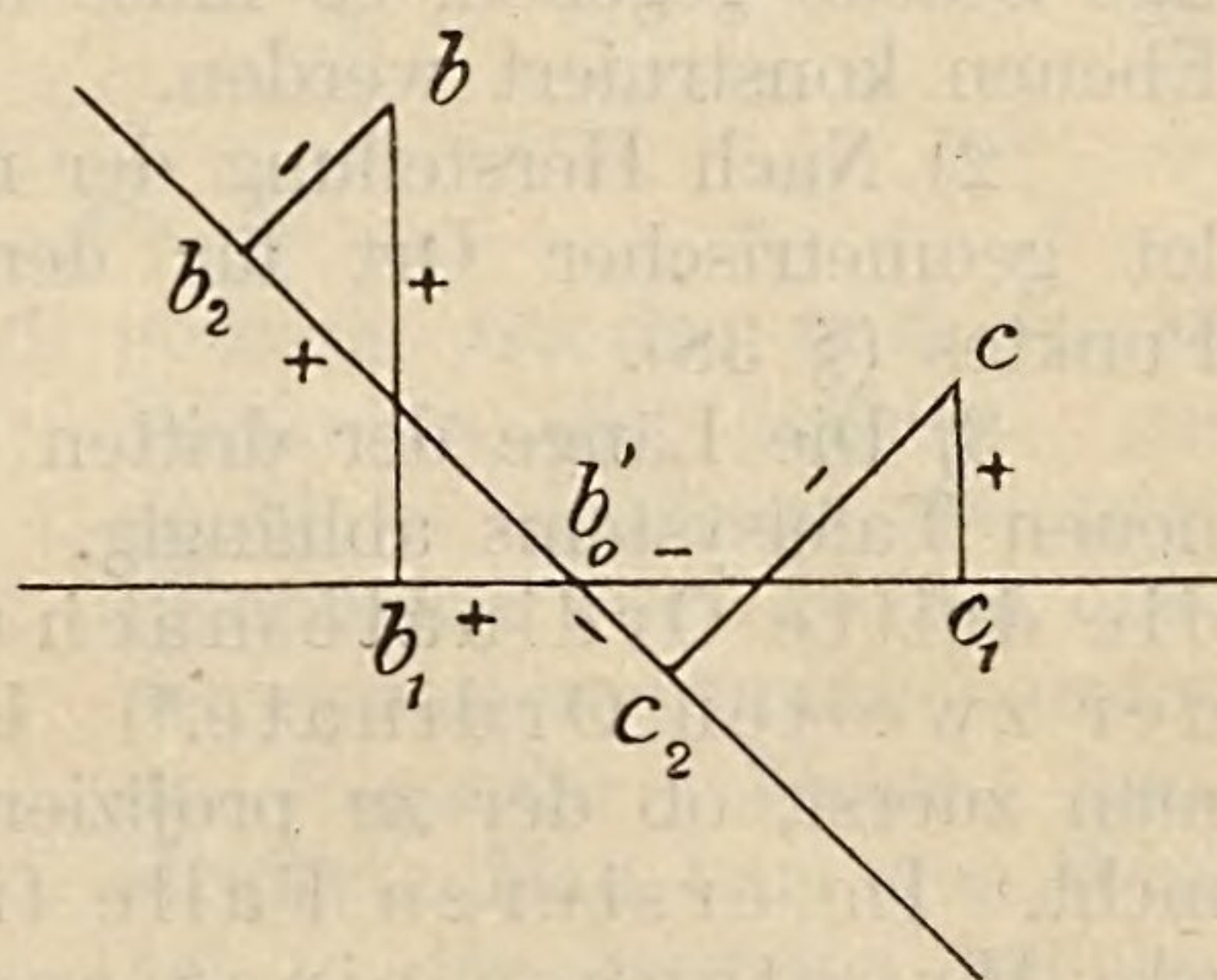


Fig. 57.

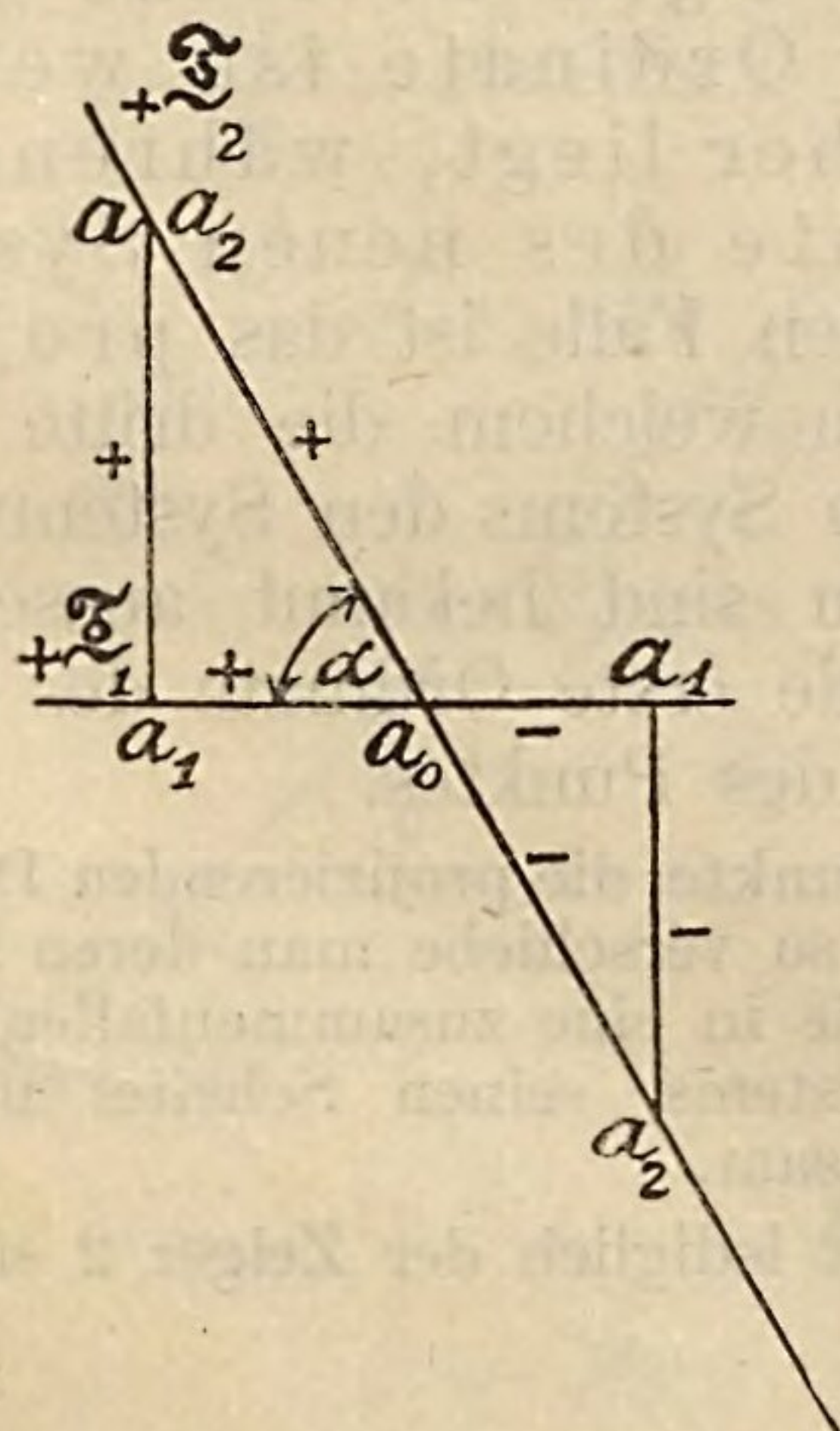


Fig. 58 a.

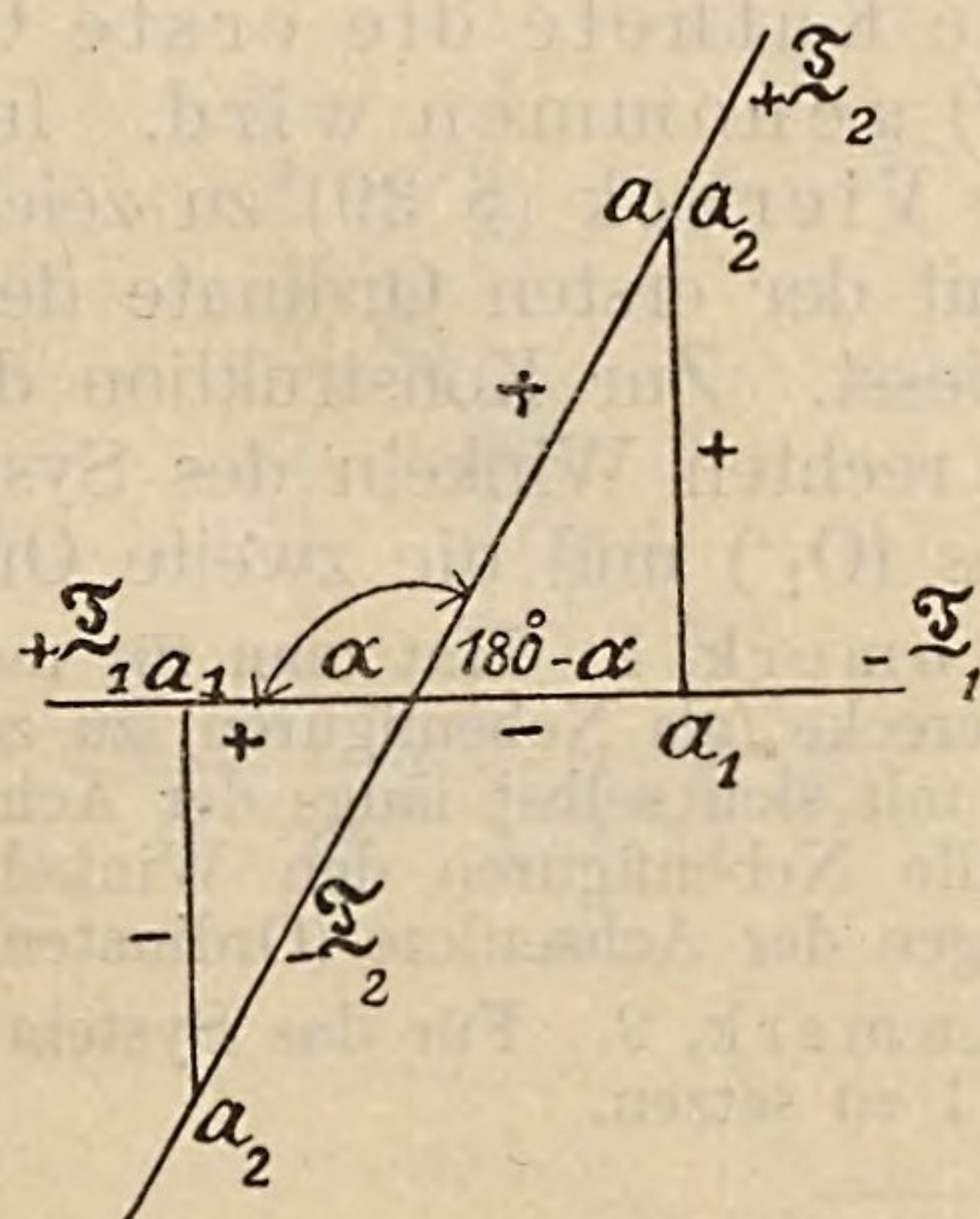


Fig. 58 b.

Punkt in $\mathfrak{T}_2$ liegt. Hinsichtlich der Vorzeichen ergeben die Figuren, dass für einen spitzen Systemwinkel α die Vorzeichen aller drei Seiten einander gleich sind (Fig. 58a), dass hingegen für einen stumpfen Systemwinkel das Dreieck nur mit dem spitzen Nebenwinkel ($180 - \alpha$) gezeichnet werden kann, dass sodann die erste Ordinate stets das entgegengesetzte Vorzeichen der beiden andern Seiten erhält.

Übungsaufgabe: Man zeichne die Projektionsvierecke für die Punkte der Halbierungsebene eines schiefwinkligen Systems mit dem Winkel $\alpha = 60^\circ$.

§ 40. Wir können nun der ursprünglichen Aufgabe, ein Gebilde aus einem Tafelsystem in ein anderes überzutragen, näher treten. Wir nehmen an, dass ein durch seine Risse im System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ bekannter Punkt in ein System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ projiziert werden soll. Das Verfahren bei der Lösung der gestellten Aufgabe ist in Kürze folgendes:

1) Im neuen System, in welches der erste Riss unverändert mit herüber genommen wird, so dass nur der dritte Riss zu bestimmen bleibt, ist zunächst die Achse ($\mathfrak{A}_{13}$), die Schnittlinie der beiden Tafeln, aufzusuchen: Ist die dritte Tafel willkürlich, so ist es auch die Achse, ist sie aber durch anderweitige Stücke gegeben, so muss nach § 31 die Schnittlinie der beiden Ebenen konstruiert werden.

2) Nach Herstellung der neuen Achse ist zunächst das Achsenlot geometrischer Ort für den zu gewinnenden dritten Riss des Punktes (§ 38).

3) Die Länge der dritten Ordinate ist sodann von der Art des neuen Tafelsystems abhängig. Ist dasselbe rechtwinklig, so ist die dritte Ordinate (nach Grösse und Vorzeichen) gleich der zweiten Ordinate.*) Ist es aber schiefwinklig, so frage man zuerst, ob der zu projizierende Punkt in $\mathfrak{T}_3$ selbst liegt, oder nicht. Im ersteren Falle findet man die dritte Ordinate als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks (§ 39), dessen eine Kathete die zweite Ordinate ist, welcher der Winkel des Systems gegenüber liegt, während als zweite Kathete die erste Ordinate des neuen Systems (O_1' **) genommen wird. Im zweiten Falle ist das projizierende Viereck (§ 39) zu zeichnen, in welchem die dritte Ordinate mit der ersten Ordinate des neuen Systems den Systemwinkel einschliesst. Zur Konstruktion derselben sind bekannt ausser den beiden rechten Winkeln des Systems, die erste Ordinate des neuen Systems (O_1') und die zweite Ordinate des Punktes.

Anmerk. 1. Hat man für mehrere Punkte die projizierenden Dreiecke oder Vierecke (als Nebenfiguren) zu zeichnen, so verschiebe man deren Ebenen parallel mit sich selbst längs der Achse, bis sie in eine zusammenfallen; dann haben alle Nebenfiguren den Winkel des Systems, seinen Scheitel und die Richtungen der Achsenlote (Ordinaten) gemeinsam.

Anmerk. 2. Für das System $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$ ist lediglich der Zeiger 2 statt des Zeigers 1 zu setzen.

*) Der Vollständigkeit halber ist dieser Satz aus § 26 wiederholt.

**) lies Ordinate eins Strich.

Die Figur 59 zeigt die Übertragung der Punkte a, b, c, d, f aus dem System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ in das rechtwinklige System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$, dessen Achse ($\mathfrak{A}_{13}$) beliebig gezeichnet wurde.

Man hatte $a_0'a_3 = a_0a_2$ u. s. w. zu machen; für den Punkt b wurde $O_3 = O_2 = 0$, für c u. f mussten die $O_3 = O_2$ negativ genommen werden.

In Fig. 60 sind die Punkte a, b, c, d, f aus dem System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ in das schiefwinklige System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$, dessen

Achse ($\mathfrak{A}_{13}$) hier ebenfalls willkürlich

Fig. 59.

gezogen wurde, und dessen Winkel α als gegeben gedacht ist, projiziert. Die projizierenden Vierecke (Fig. 60b) der einzelnen Punkte wurden in folgender Weise konstruiert. Man trug den Winkel α des Systems beliebig auf, seine Schenkel $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_3$ gaben die Richtungen der

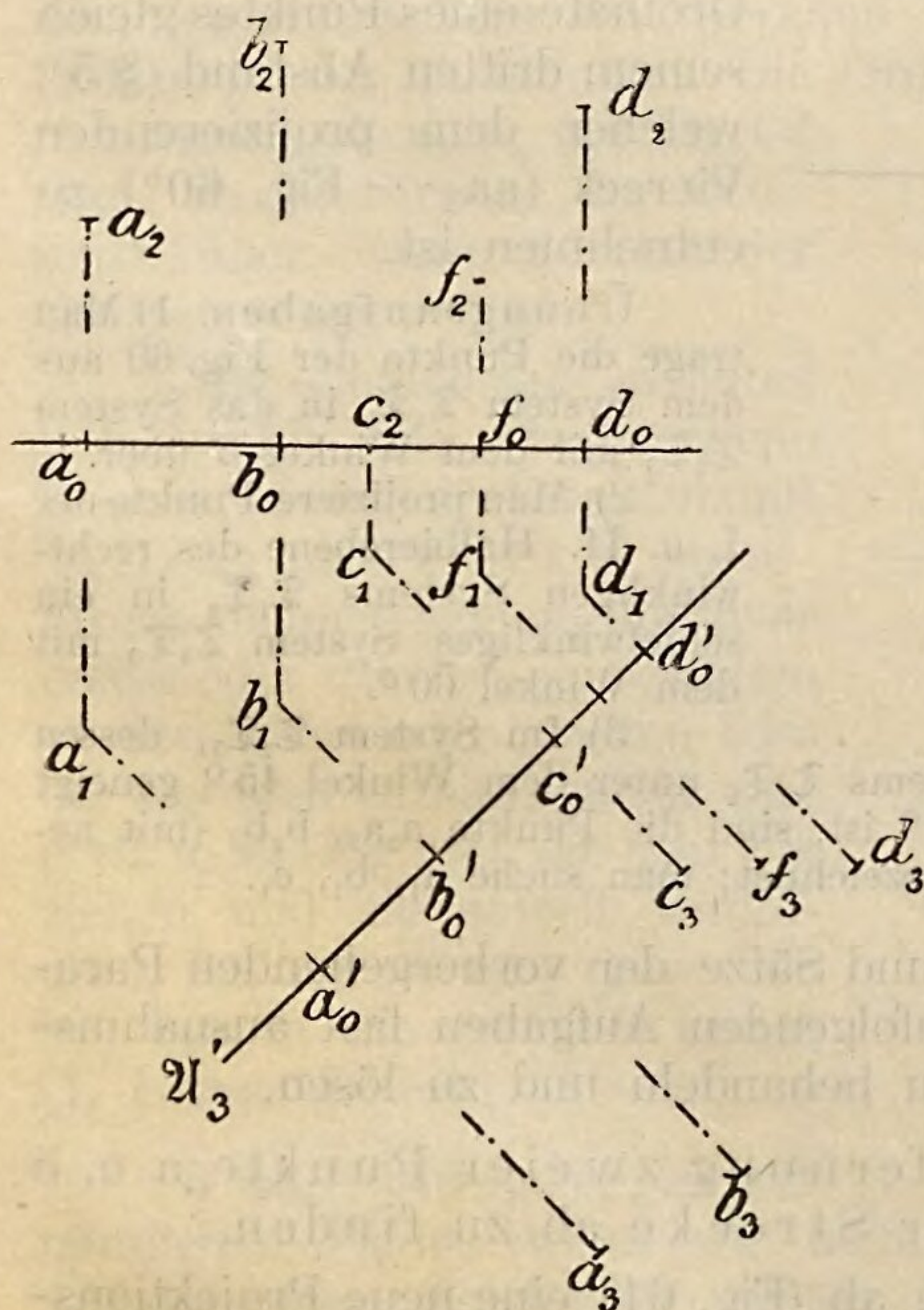


Fig. 60 a.

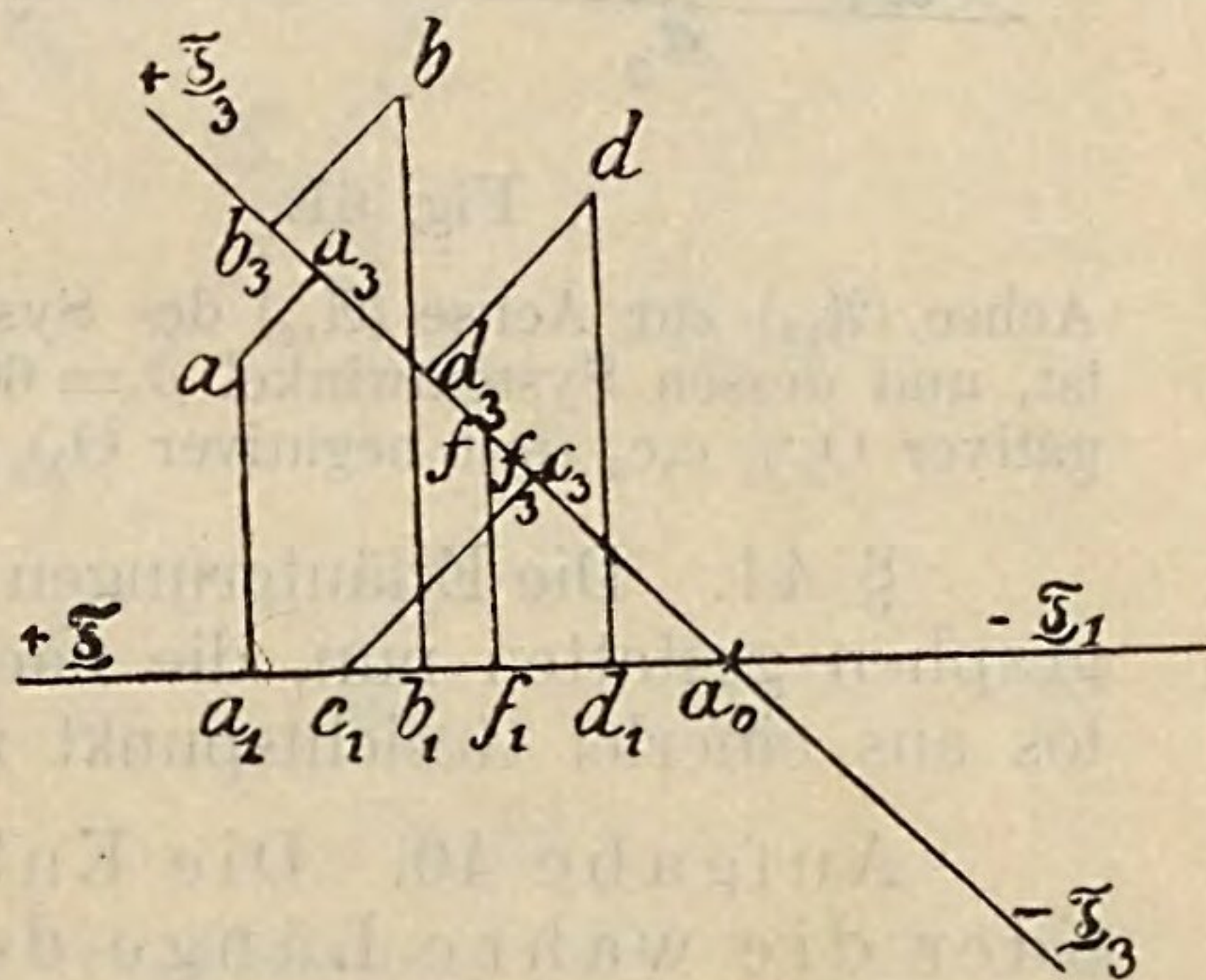


Fig. 60 b.

positiven und negativen Achsenlote (Ordinaten). Aus der Haupt-

figur (Fig. 60a) entnahm man zunächst die O_1' ($a_1a_0' \dots$) der Punkte, und trug sie entsprechend ihrem Vorzeichen auf $+\mathfrak{T}_1$ oder $-\mathfrak{T}_1$, dem einen Schenkel des Winkels α_1 auf, errichtete sodann in den Endpunkten $a_1 \dots$ dieser Strecken Senkrechte gleich den zweiten Ordinaten ($a_1a = a_0a_2 \dots$), und fällte aus den so gewonnenen Punkten ($a \dots$) Senkrechte auf den zweiten Winkelschenkel ($\mathfrak{T}_3$), wodurch die Vierecke geschlossen und die dritten Ordinaten gefunden wurden ($a_0'a_3 \dots$). Diese Längen wurden in die Hauptfigur übertragen ($a_0'a_3 = a_0'a_3 \dots$) und so die dritten Risse ($a_3 \dots$) hergestellt. — Für b u. d fand man überschlagene Vierecke, jene für c u. f wurden zu Dreiecken, da $c_0c_2 = 0$ gegeben war, f liegt, da $ff_3 = 0$ ist, in der $\mathfrak{T}_3$. Wiederholt mag nämlich bemerkt werden, dass wie die Senkrechten $a_1a \dots$ (Fig. 60b) die Abstände von $\mathfrak{T}_1$, so die Lote $aa_3 \dots$ die Abstände der Punkte von $\mathfrak{T}_3$ angeben.

Anmerk. 3. Es ist unschwer einzusehen, dass man, um einen Punkt aus dem System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ in das System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ zurückzuführen, nur die Zeiger 3 u. 2 zu vertauschen hat.

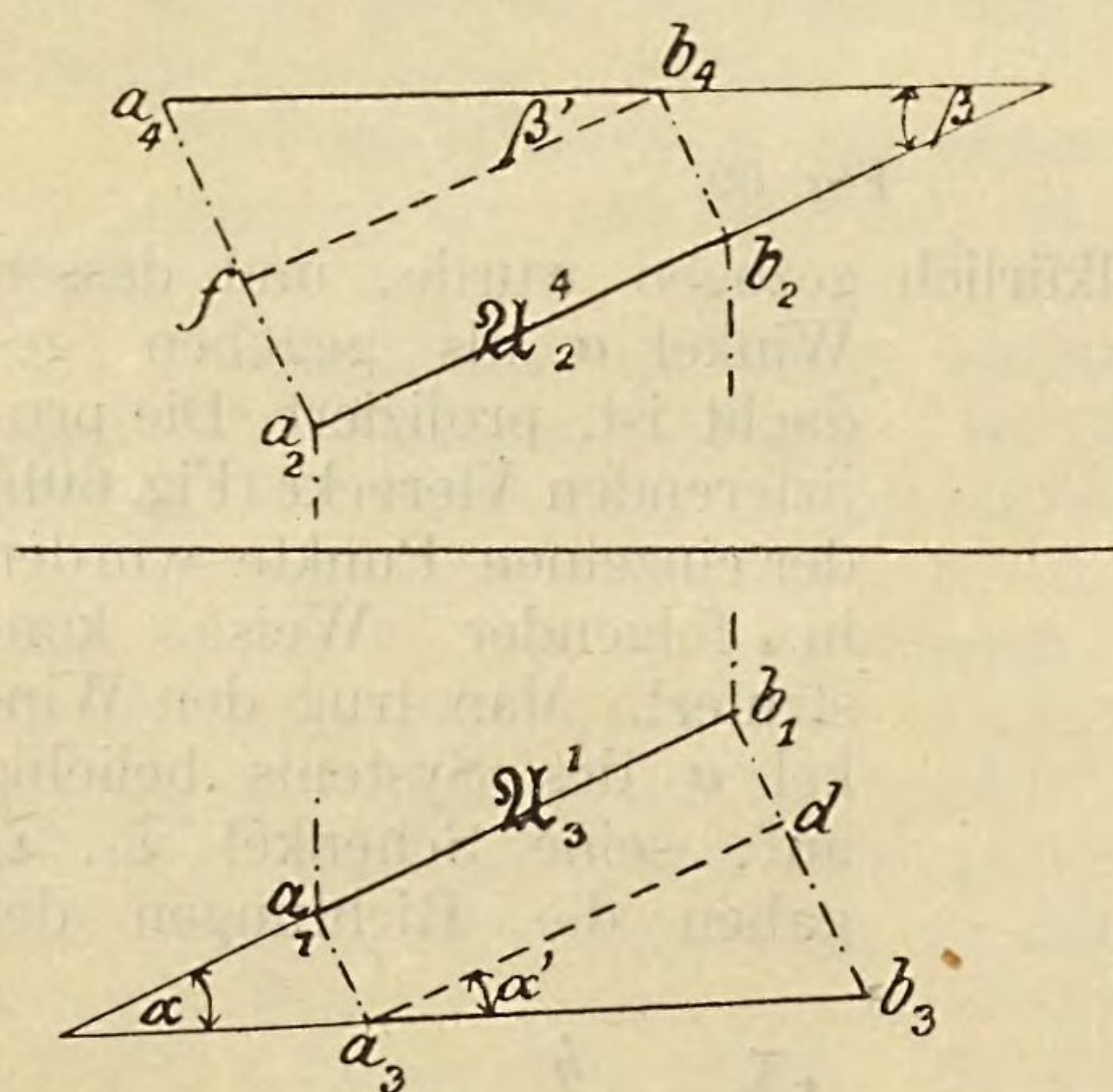


Fig. 61.

Achse ($\mathfrak{U}_{23}$) zur Achse ($\mathfrak{U}_{12}$) des Systems $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ unter dem Winkel 45° geneigt ist, und dessen Systemwinkel $\beta = 60^\circ$ ist, sind die Punkte a_2a_3 , b_2b_3 (mit negativer O_2'), c_2c_3 (mit negativer O_3) gezeichnet; man suche a_1 , b_1 , c_1 .

§ 41. Die Erläuterungen und Sätze der vorhergehenden Paragraphen gestatten nun, die nachfolgenden Aufgaben fast ausnahmslos aus einerlei Gesichtspunkt zu behandeln und zu lösen.

Aufgabe 40. Die Entfernung zweier Punkte a u. b oder die wahre Länge der Strecke ab zu finden.

Man lege durch die Gerade ab (Fig. 61) eine neue Projektionsebene $\mathfrak{T}_3$ rechtwinklig zu einer der vorhandenen Projektionsebenen, etwa $\mathfrak{T}_1$. Die Schnittlinie der $\mathfrak{T}_3$ u. $\mathfrak{T}_1$, oder die Achse

Zusatz. Sollte es notwendig werden, mit der $\mathfrak{T}_3$ noch eine $\mathfrak{T}_4$ und zwar senkrecht zur $\mathfrak{T}_3$, zu verbinden, so ist im neuen rechtwinkligen System $\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4$ die vierte Ordinate eines Punktes gleich seinem dritten Abstand (§ 5), welcher dem projizierenden Viereck ($aa_3 \dots$ Fig. 60b) zu entnehmen ist.

Übungsaufgaben. 1) Man trage die Punkte der Fig. 60 aus dem System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ in das System $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$ mit dem Winkel β über.

2) Man projiziere Punkte der I. u. II. Halbierebene des rechtwinkligen Systems $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ in ein schiefwinkliges System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ mit dem Winkel 60° .

3) Im System $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$, dessen

$\mathfrak{A}_{13}$, fällt sodann mit a_1b_1 zusammen und die dritten Risse von a u. b bestimmen sich im neuen Achsenlot so, dass die $O_3 = O_2$ gemacht werden. In a_3b_3 hat man nun die wahre Länge von ab . Die Fig. 61 enthält auch die Lösung mit Hilfe des ebenfalls rechtwinkligen Systems $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_4$ und muss sich zur Kontrolle $a_4b_4 = a_3b_3$ ergeben. — Die Fig. 62, deren Buchstaben die gleiche Bedeutung wie in Fig. 61 haben, lehrt die richtige Anwendung der Vorzeichen der Ordinaten.

Zusatz: Wenn $a_0b_2 = b_0b_2$, die Strecke ab also der $\mathfrak{T}_1$ parallel wird, so ist auch $a_0'a_3 = b_0'b_3$ und das Trapez $a_0'a_3b_3b_0'$ geht in ein Rechteck über, in welchem $a_3b_3 = a_1b_1$, d. h.: Strecken projizieren sich auf zu ihnen parallele Ebenen in wirklicher Länge, ein Satz, der bereits in § 36 erwähnt wurde.

§ 42. Bei der häufigen Wiederkehr der vorliegenden Aufgabe verlohnt es sich der Mühe, eine kürzere und weniger Platz beanspruchende Lösung zu gewinnen.

Zieht man im Trapez $a_1a_3b_3b_1$ (Fig. 61) etwa durch a_3 eine Parallele zu a_1b_1 bis zu deren Durchschnitt d mit b_1b_3 , so erscheint die gesuchte Länge als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der erste Riss der Geraden ($a_3d = a_1b_1$) und dessen andere Kathete gleich der Differenz der **zweiten** Ordinaten der Endpunkte ist. Im System $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_4$ besteht dieses Dreieck aus dem zweiten Riss der Geraden und der Differenz der ersten Ordinaten der Endpunkte. Die Ordinaten-Differenz ist arithmetisch zu nehmen, sie geht, wie Fig. 62 zeigt, in die Summe der Ordinaten über, wenn die eine der Ordinaten negativ ist.

Am einfachsten zeichnet sich wohl das besprochene Dreieck, welches wir in Zukunft „Längendreieck“ einer Strecke nennen wollen, und zwar erstes oder zweites, je nachdem es den ersten oder zweiten Riss der Geraden enthält, wenn wir, etwa in $\mathfrak{T}_2$ (Fig. 63), die $a_2m \parallel \mathfrak{A}$ ziehen und sie soweit verlängern, bis $nm = a_1b_1$ geworden ist; b_2n ist die gesuchte Länge (1. Längendreieck).

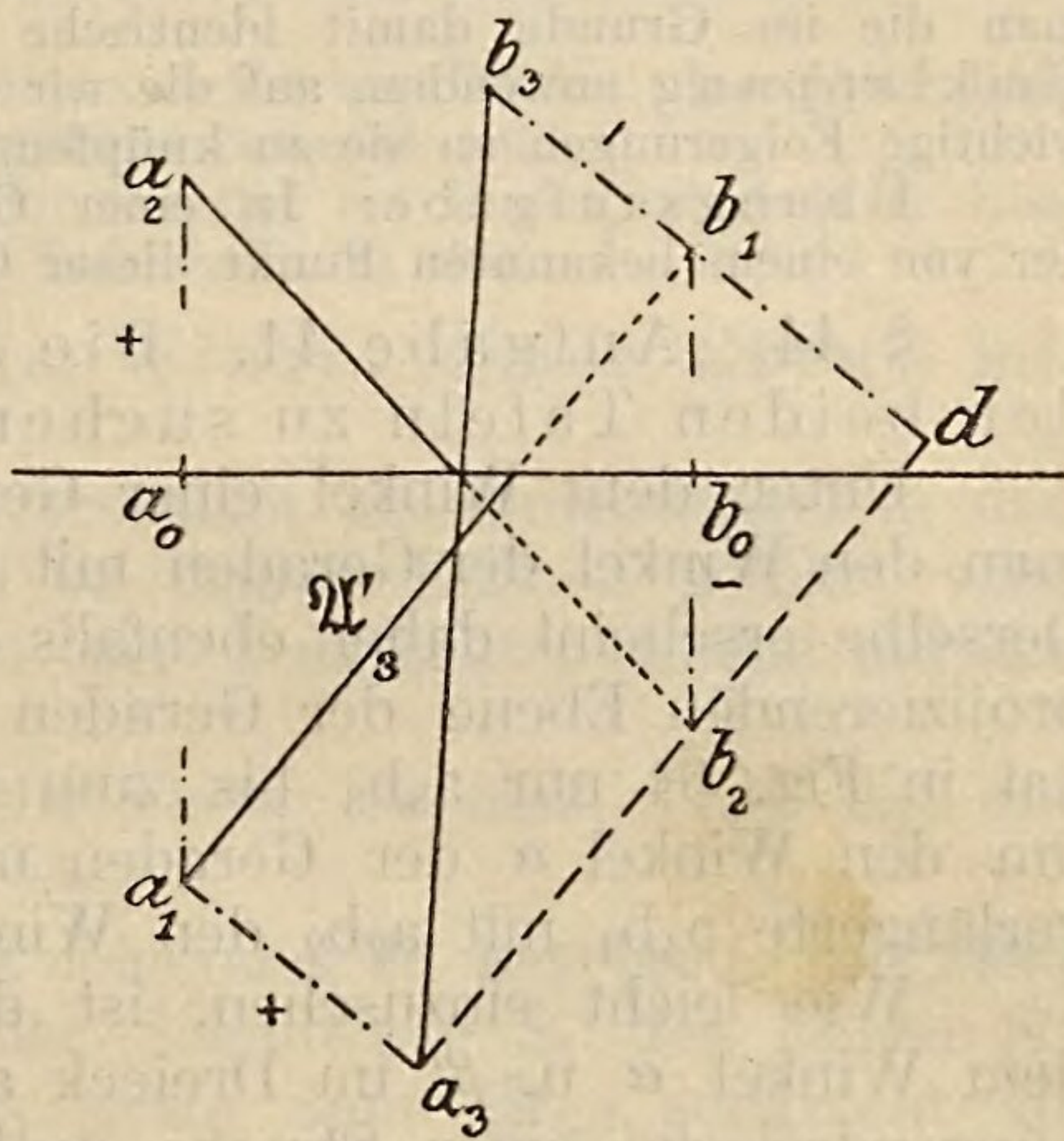


Fig. 62.

§ 43. Wir gelangen zur nämlichen Figur, wenn wir behufs Bestimmung der Länge von $a b$ die oben angedeutete zweite Methode benutzen und die Gerade auf eine zu ihr parallele Ebene projizieren. Doch lassen wir hier die Projektionsebenen ungeändert und drehen da-

gegen die Gerade, bis sie mit einer derselben, z. B. $\mathfrak{T}_1$, parallel wird. Die Drehung vollziehen wir so, dass wir die erste projizierende (Lot-) Ebene der Geraden um das projizierende Lot bb_1

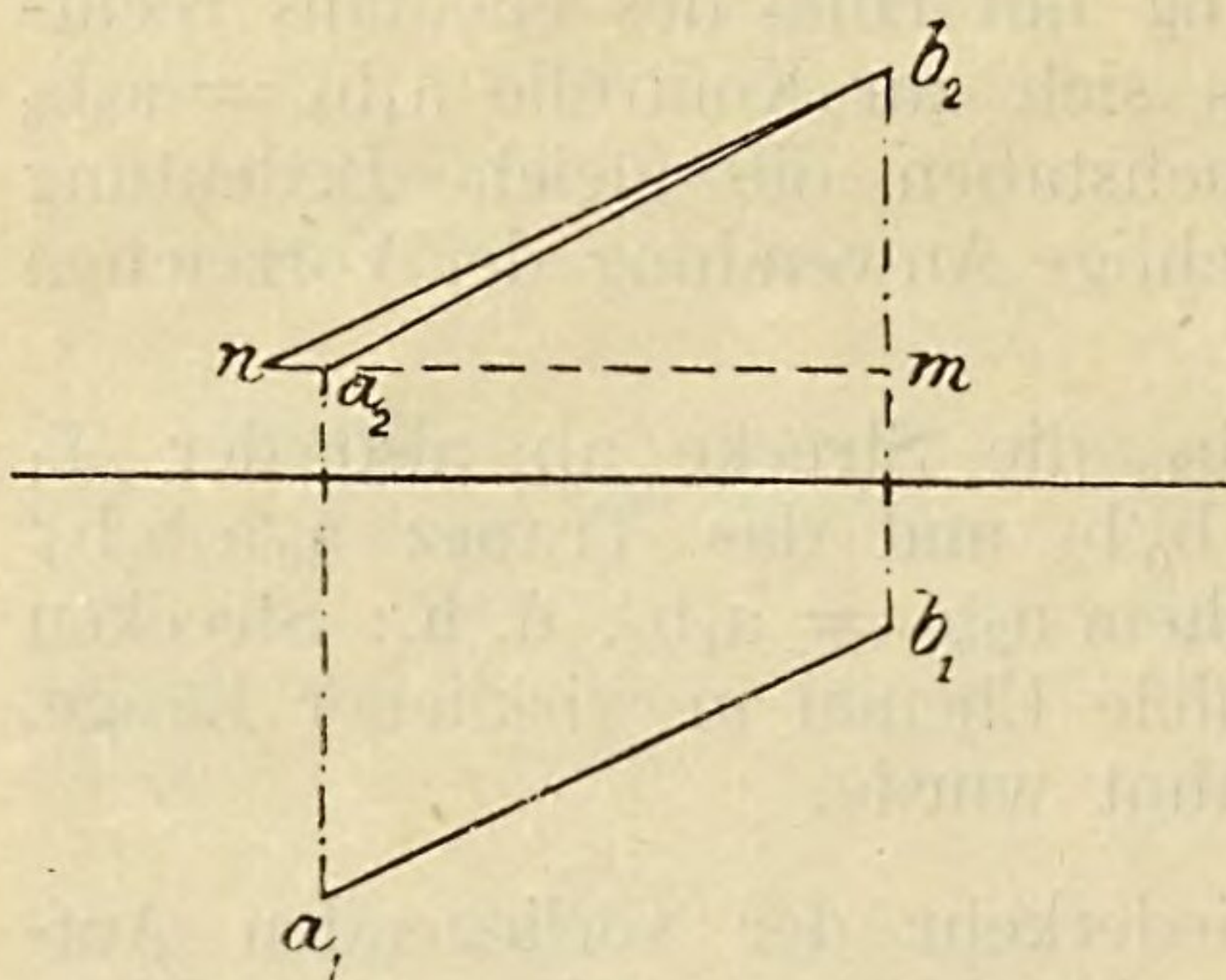


Fig. 63.

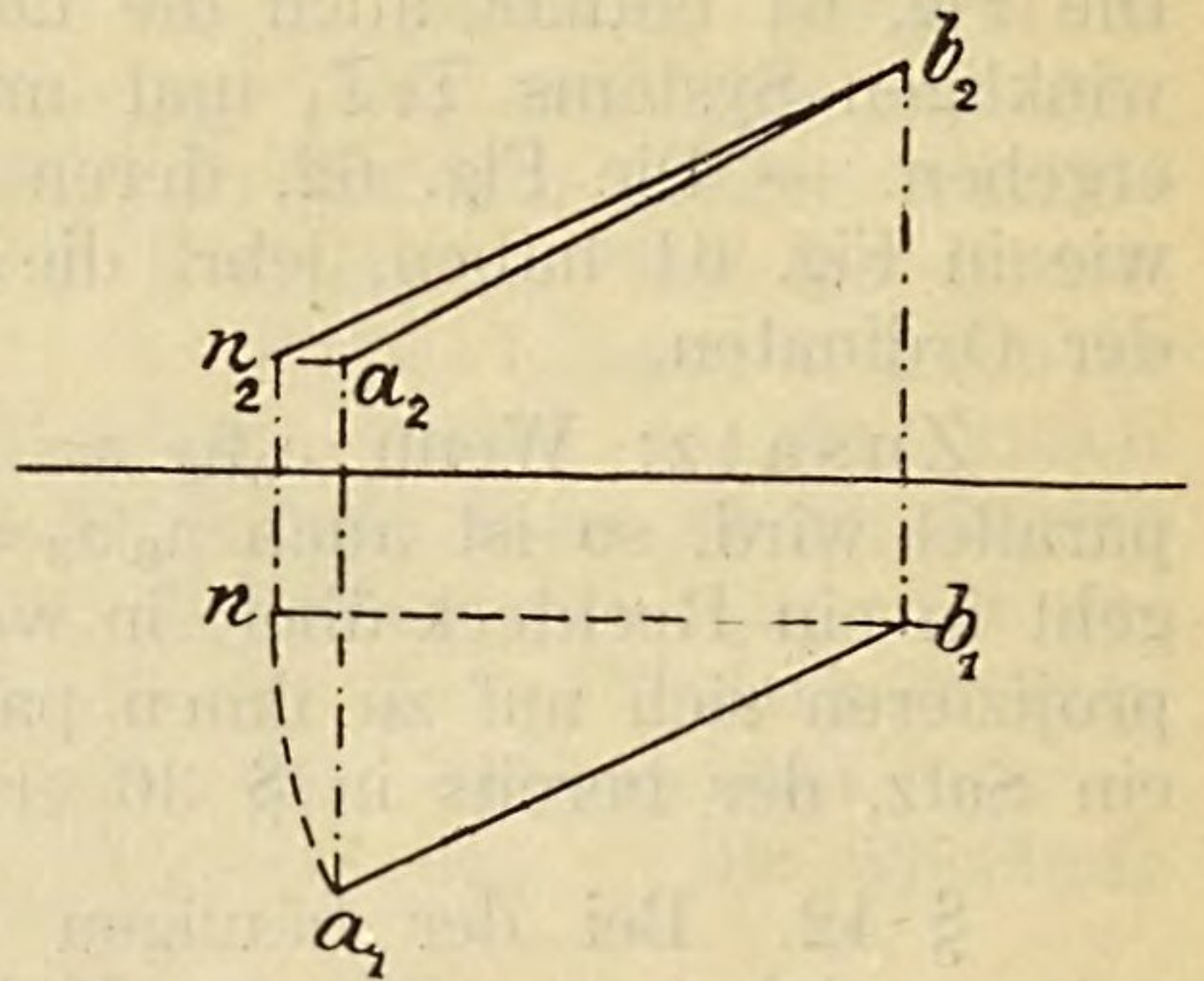


Fig. 64.

(Fig. 64) bewegen. Während der Drehung beschreibt Punkt a einen Kreisbogen, und zwar in der durch a parallel zu $\mathfrak{T}_1$ gelegten Ebene, welcher sich daher in $\mathfrak{T}_1$ in wirklicher Grösse und in $\mathfrak{T}_2$ als Gerade parallel zur Achse projiziert. Der Mittelpunkt des Bogens in $\mathfrak{T}_1$ ist der feste Punkt b_1 , sein Radius b_1a_1 , der Bogen daher unmittelbar zu zeichnen. Nach vollbrachter Drehung geht der erste Riss der Geraden der Achse parallel, man begrenzt daher den Bogen durch $b_1n \parallel \mathfrak{A}$, projiziert n_1 in die durch $a_2 \parallel \mathfrak{A}$ gezogene Gerade und hat in b_2n_2 den zweiten Riss der in parallele Lage zu $\mathfrak{T}_2$ gebrachten Geraden, oder ihre wirkliche Grösse.

Anmerk. Statt der Methode des Projizierens in die eigene Ebene kann man die im Grunde damit identische Methode der Umlegung oder Umklappung anwenden, auf die wir später näher eingehen, um einige recht wichtige Folgerungen an sie zu knüpfen.

Übungsaufgabe: In einer Geraden denjenigen Punkt anzugeben, der von einem bekannten Punkt dieser Geraden eine gegebene Entfernung hat.

§ 44. Aufgabe 41. Die Winkel einer Geraden mit den beiden Tafeln zu suchen.

Unter dem Winkel einer Geraden mit einer Ebene versteht man den Winkel der Geraden mit ihrer Projektion auf diese Ebene. Derselbe erscheint daher ebenfalls in der vorhin als $\mathfrak{T}_3$ aufgefassten projizierenden Ebene der Geraden in wirklicher Grösse, und man hat in Fig. 61 nur a_3b_3 bis zum Schnitt mit a_1b_1 zu verlängern, um den Winkel α der Geraden mit $\mathfrak{T}_1$ zu erhalten, während die verlängerte a_4b_4 mit a_2b_2 den Winkel β mit $\mathfrak{T}_2$ gibt.

Wie leicht einzusehen, ist der Winkel α' im Dreieck a_3b_3d dem Winkel α u. β' im Dreieck a_4b_4f dem Winkel β gleich. Die Längendreiecke einer Strecke enthalten daher auch ihre Winkel mit den Tafeln, und zwar das erste den Winkel mit $\mathfrak{T}_1$, das zweite den Winkel mit $\mathfrak{T}_2$.

§ 45. Legt man die beiden Längendreiecke so nebeneinander, dass sich die gleichen Hypotenusen decken, so entsteht (Fig. 65) das Kreisviereck mb_2dn , in welchem $dn < mn$ ($dn = b_1f$, $mn = a_1b_1$),

daher $\angle \beta < \angle nb_2m$ und $\alpha + \beta < \alpha + nb_2m$ oder $\alpha + \beta < 90^\circ$. Wird $dn = nm$ oder $b_1f = a_1b_1$, in welchem Falle die Gerade in eine gelehnte übergeht, dann wird $\beta = nb_2m$ und $\alpha + \beta = 90^\circ$. Daher:

Die Summe der Winkel einer Geraden mit den beiden Tafeln ist kleiner als 90° und erreicht nur bei der gelehnten Geraden den Wert 90° .

§ 46. Aus der Betrachtung der Längendreiecke verschiedener Strecken ergeben sich ohne weiteres folgende Sätze:

1) Strecken von gleicher Länge und gleichen Rissen in einer Tafel bilden gleiche Winkel mit dieser Tafel und umgekehrt.

2) Ungleiche Strecken mit gleicher Neigung zu einer Tafel, verhalten sich wie ihre Risse in dieser Tafel.

3) Teilt man eine Strecke in einem gewissen Verhältnis, so teilen die Risse der Teilpunkte auch die Risse der Strecke im selben Verhältnis.

4) Die Projektion einer Strecke ist gleich dem Produkt aus der wirklichen Strecke und dem Cosinus des Neigungswinkels der Strecke zur Projektionsebene.

Übungsaufgaben: 1) Die Winkel einer gelehnten Geraden mit den Tafeln zu suchen.

2) Eine Gerade zu zeichnen, wenn von ihr ein Punkt, einer ihrer Risse und der Winkel mit der gleichnamigen Tafel bekannt sind.

3) Eine Gerade zu zeichnen, wenn von ihr ein Punkt, einer ihrer Risse und der Winkel mit der zugeordneten Tafel bekannt sind.

§ 47. Aufgabe 42. Die Winkel einer Ebene mit den Tafeln aufzusuchen.

Der Winkel zweier Ebenen erscheint als Linienwinkel in derjenigen Ebene, welche senkrecht zu beiden Ebenen geführt wird, und wird von den Schnittlinien der senkrechten Ebene mit den Schenkelebenen gebildet.

Wir führen daher eine solche Ebene als neue Tafel ein und projizieren die Schnittlinien auf sie.

Betreffs der Ausführung ist folgendes zu beachten: Die neue Ebene $\mathfrak{T}_3$ steht senkrecht auf der Schnittlinie S_1 der Ebene ST (Fig. 66) mit $\mathfrak{T}_1$, demgemäss ihre erste Spur ($\mathfrak{U}_{13}$) senkrecht auf S_1 und das System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ ist rechtwinklig. Die Schnittlinie der $\mathfrak{T}_3$ mit $\mathfrak{T}_1$ ist $\mathfrak{U}_{13}$ selbst, die Schnittlinie der $\mathfrak{T}_3$ mit ST ist eine Gerade, zu deren Bestimmung zwei Punkte (k u. r) hinreichen. Der dritte Riss des Punktes k fällt, weil $k_0k_2 = o$, mit k_1 zusammen, jener von r liegt im Achsenlot r_1r_3 und die O_3 ist gleich O_2 ($r_1r_3 = r_0r_2$). Die Geraden k_3r_3 und $\mathfrak{U}_{13}$ bilden den gesuchten

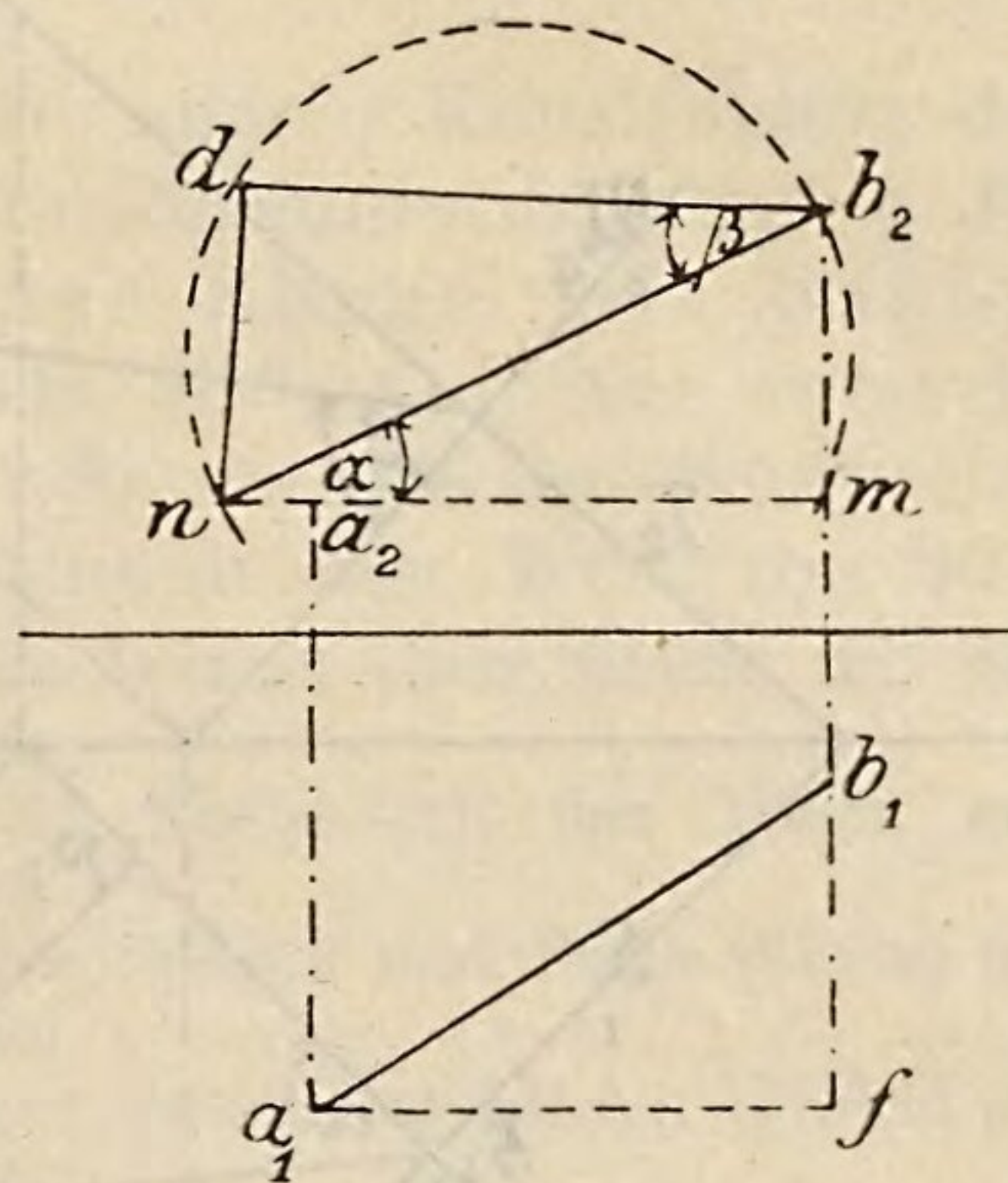


Fig. 65.

Winkel α . — Führt man dieselbe Konstruktion in $\mathfrak{T}_2$ durch ($\mathfrak{U}_{24} \perp T_2$ u. s. w.), so erhält man den Winkel β mit $\mathfrak{T}_2$.

Diejenige Linie, nach welcher eine Ebene von einer zu ihrer Spur senkrechten Ebene geschnitten wird, heisst die Neigungs-

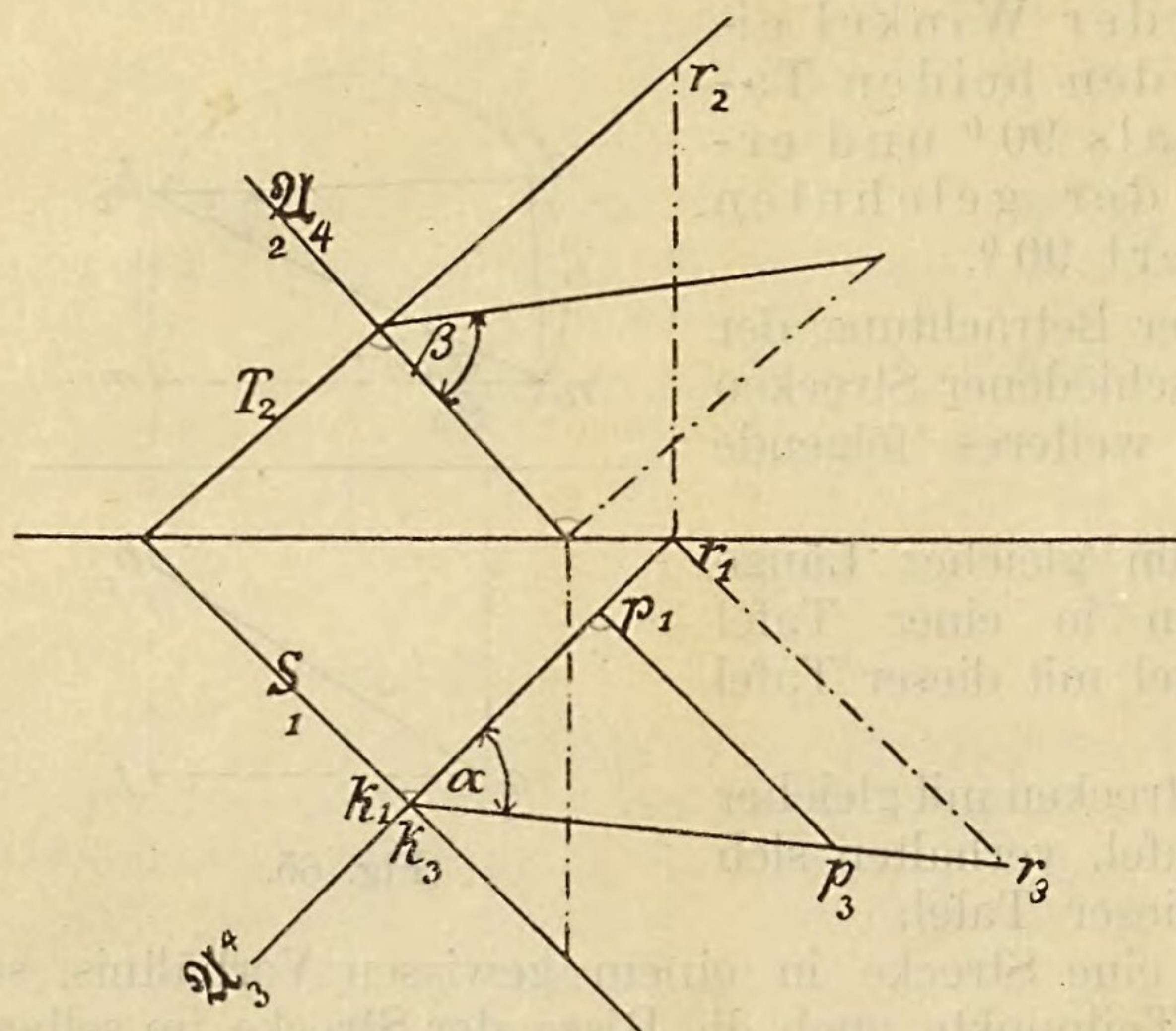


Fig. 66.

oder Böschungslinie, weil ihr Winkel mit der Tafel jenem der Ebene mit derselben Tafel gleich ist. Projiziert man den beliebigen Punkt p (p_3) der Neigungslinie auf die Tafel z. B. $\mathfrak{T}_1$ (Fig. 66), so ist der Winkel α der Ebene mit dieser Tafel in dem rechtwinkligen Dreieck $k_3 p_1 p_3$ enthalten und

zwar dem Abstand des Punk-

tes p von der gleichen Tafel $\mathfrak{T}_1$ gegenüber. Wegen der beliebigen Lage der Neigungslinie wird der Punkt p zu einem beliebigen Punkte der Ebene, daher: Der Winkel einer Ebene mit einer der Tafeln erscheint in einem rechtwinkligen Dreiecke,

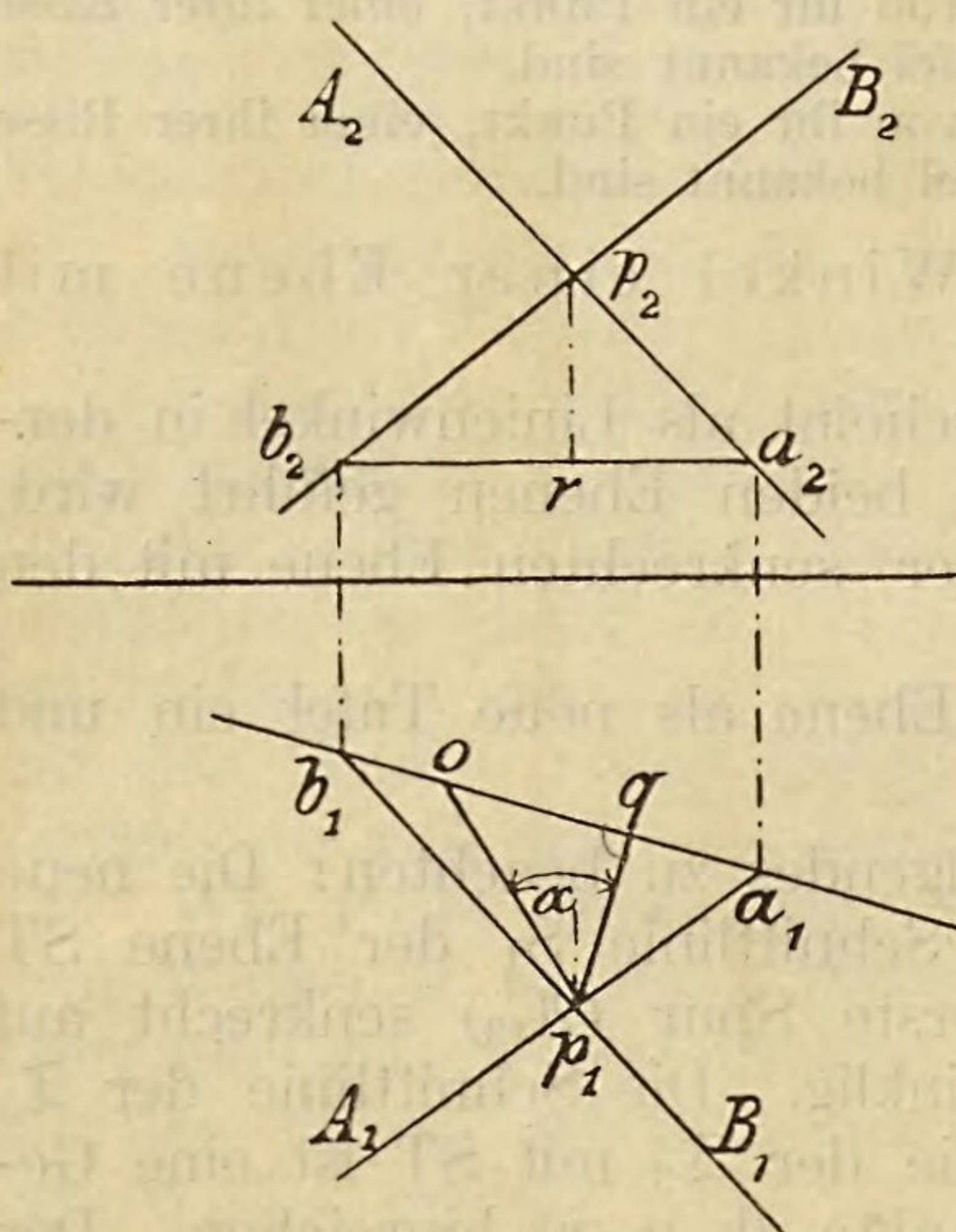


Fig. 67.

dessen eine dem Winkel gegenüberliegende Kathete der Abstand eines beliebigen Punktes der Ebene von der Tafel, und dessen andere Kathete die Entfernung des Risses jenes Punktes von der gleichnamigen Ebenenspur ist. Wir wollen dieses Dreieck „Neigungsdreieck“ der Ebene nennen.

Statt der Spur der Ebene kann auch jede zu ihr Parallele benützt werden. In Fig. 67 ist $a_1 b_1$ eine erste Spurparallele, $p_1 q$ der Abstand des Risses p_1 von dieser Spurparallelen, $q o = p_2 r$ der Abstand des Punktes p von der Ebene der Spurparallelen, und $p_1 q o$ das erste Neigungsdreieck mit $\sphericalangle qp_1 o = \alpha$.

Zusatz. Steht die gegebene Ebene auf einer der Tafeln,

6) Von einem Punkt x kennt man $x_1 (0, -3)$; es soll x_2 so bestimmt werden, dass x von der Ebene abc die Entfernung $d = 4$ hat. $a (0, 4, 9)$; $b (5, 1, 4)$; $c (2, 10, -2)$.

7) In einer Geraden denjenigen Punkt anzugeben, welcher von einer gegebenen Ebene einen bekannten Abstand hat.

§ 50. Aufgabe 44. Die Entfernung eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen.

Liegen beide Gebilde in einer der Tafeln, so fällt die wirkliche Entfernung mit jener der Risse zusammen. Wir nehmen daher die Ebene des Punktes a (Fig. 70) und der Geraden G als $\mathfrak{T}_3$ und verbinden sie mit $\mathfrak{T}_1$ zu dem schiefwinklichen System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$. Die Achse ($\mathfrak{A}_{13}$) des neuen Systems ist die erste Spur S_1 der Ebene aG . Die dritten Ordinaten des Punktes a , sowie des Punktes b der Geraden G finden sich als Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke $a_0'a_1a$ und $a_0'b_1b$ (§ 40), welche den Systemwinkel α gemeinsam haben, c_3 fällt mit c_1 zusammen. Das Lot a_3d_3 auf G_3 ist die gesuchte Entfernung, deren erster und zweiter Riss a_1d_1 u. a_2d_2 sich ohne weiteres nachbringen lassen.

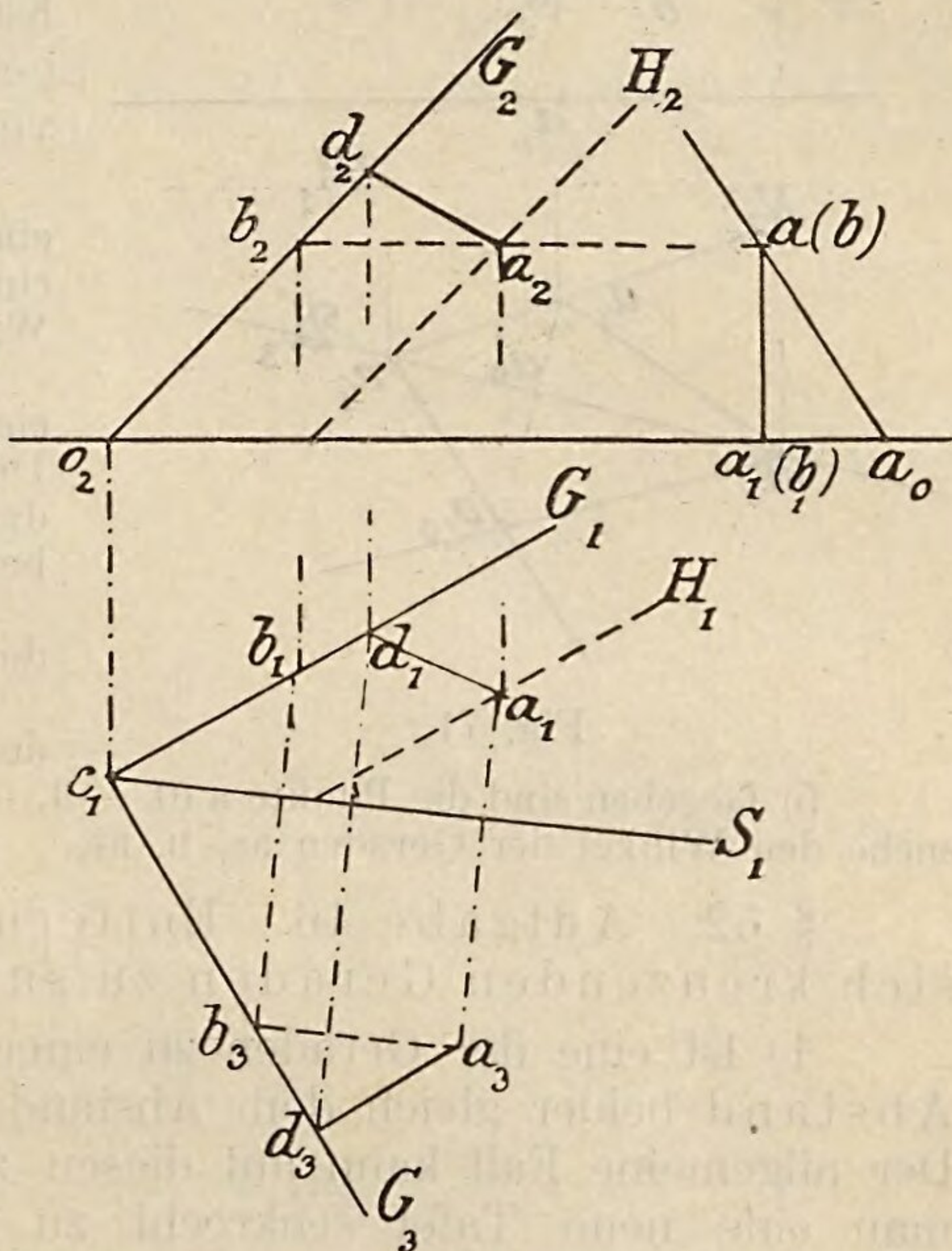


Fig. 70.

Übungsaufgaben: 1) Man löse die Aufgabe dadurch, dass man durch den gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht zur Geraden führt, den Schnittpunkt beider sucht und die wahre Entfernung des gefundenen Schnittpunktes von dem gegebenen Punkte konstruiert.

2) Die Entfernung eines Punktes von einer zu $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ parallelen, sowie von einer gelehnten Geraden zu suchen.

3) Die Entfernung zweier paralleler Geraden zu finden.

4) In einer Geraden denjenigen Punkt anzugeben, welcher von einem bekannten Punkt ausserhalb dieser Geraden einen gegebenen Abstand hat.

5) Den Abstand des Punktes $a (0, -2, -4)$ von der Achse zu suchen.

6) Den Abstand des Punktes $a (0, 3, 0)$ von der Geraden bc zu bestimmen: $b (0, 0, 4)$; $c (3, 0, 2)$.

§ 51. Aufgabe 45. Den Winkel zweier sich schneidenden Geraden zu finden.

Man betrachte die Ebene der Geraden als $\mathfrak{T}_3$ und verbinde sie mit einer der alten Tafeln zu einem System. Die dritten Risse der Geraden schliessen den gesuchten Winkel ein.

Anstatt der Spur der Ebene kann man jede zu ihr Parallele als neue Achse ($\mathfrak{A}_{13}$) benützen, d. h. die Ebene der Geraden mit

einer zu $\mathfrak{T}_1$ parallelen Ebene zu einem System verbinden. In Fig. 71, wo M u. N die gegebenen Geraden sind, ist mn eine erste Spurparallele, deren erster Riss m_1n_1 die $\mathfrak{A}_{13}$. m_1 u. n_1 sind auch schon die dritten Risse von m u. n, während die O_3 von a als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $a_0''ba_2$ aus den Katheten $a_0''a_2$ u. $a_0''b = a_0'a_1$ gefunden wird. $m_1a_3n_1$ ist der verlangte Winkel.

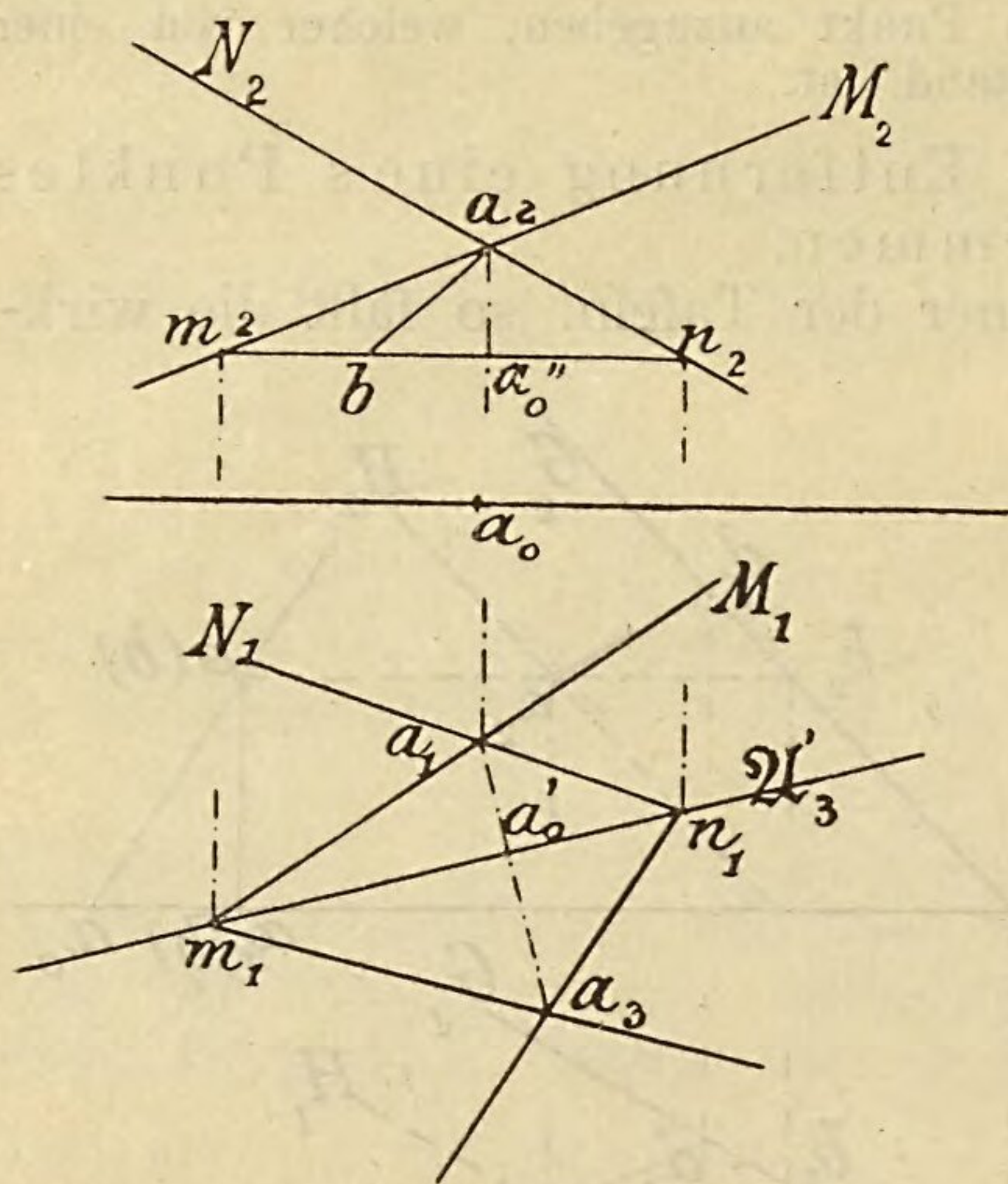


Fig. 71.

5) Gegeben sind die Punkte a (0, -3, -5), s_1 (-2, -3), t_2 (-3, 4); man suche den Winkel der Geraden as_1 u. at_2 .

§ 52. Aufgabe 46. Entfernung und Winkel zweier sich kreuzenden Geraden zu suchen.

1) Ist eine der Geraden zu einer Tafel senkrecht, so ist der Abstand beider gleich dem Abstand ihrer Risse in dieser Tafel. Der allgemeine Fall kann auf diesen zurückgeführt werden, indem man eine neue Tafel senkrecht zu einer der Geraden zu Hilfe nimmt und beide Gerade auf sie projiziert.

2) Man lege durch eine Gerade eine Ebene parallel der anderen, dann ist jeder Punkt der letzteren von jener Ebene um die gesuchte Strecke entfernt.

3) Verschiebt man die eine Gerade parallel zu sich selbst bis zum Durchschnitt mit der andern, so bilden die sich schneidenden Geraden den verlangten Winkel.

4) Zwei windschiefe Gerade, welche einer Tafel parallel sind, zeigen in dieser Tafel ihren wahren Winkel, in der zugeordneten ihren wirklichen Abstand. Um den allgemeinen Fall auf diesen besonderen zurückzuführen, lege man gleich durch die eine Gerade (A) eine Ebene parallel der andern (B), betrachte sie als $\mathfrak{T}_3$ und nehme dann eine beliebige auf $\mathfrak{T}_3$ senkrechte Ebene als $\mathfrak{T}_4$. Im Systeme $\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4$ bilden die dritten Risse der Geraden den verlangten Winkel, die vierten zeigen den gesuchten Abstand. Zur Ausführung ziehe man durch Punkt a (Fig. 72) in A die $C \parallel B$. Ebene AC ist nun $\mathfrak{T}_3$, ihr Schnitt mit $\mathfrak{T}_1$ die $\mathfrak{A}_{13}$ des Systems $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$. Die dritten Risse von b u. c, den Spurpunkten von A u. C, fallen mit b_1 u. c_1 zusammen, während die dritte Ordinate des Punktes a als

Übungsaufgaben: 1) Durch einen Punkt Gerade zu ziehen, welche eine gegebene Gerade unter gegebenem Winkel schneiden.

2) Durch einen bekannten Punkt einer gegebenen Geraden eine erste Deckgerade zu derselben so zu legen, dass sie mit ihr einen vorgeschriebenen Winkel bildet.

3) Den Winkel zweier sich schneidenden Geraden zu halbieren.

4) Den Winkel zweier sich schneidenden gelehnten Geraden zu suchen.

Hypotenuse des Dreiecks $a_1a_0'a$ (Fig. 72a) erscheint, welches Dreieck zugleich in α den Winkel des Systems $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ angibt. b_1a_3 stellt nun die A_3 , c_1a_3 die C_3 dar und der Winkel (α) beider ist schon der gesuchte. Um auch B_3 zu erhalten, projiziere man den beliebigen Punkt d der B in die $\mathfrak{T}_3$. Die dritte Ordinate von d , welcher Punkt nun nicht mehr in $\mathfrak{T}_3$ liegt, findet man in dem projizierenden Viereck $a_0'd_1dd_3$ (Fig. 72a), welches aus dem Systemwinkel α_1 , der $O_1' = d_0'd_1 = a_0'd_1$, der $O_2 = d_0d_2 = d_1d$ des Punktes d u. der $dd_3 \perp a_0'a$ konstruiert ist, als die Strecke $a_0'd_3$. Durch d_3 wird nun $B_3 \parallel C_3$ gezogen. Die Strecke dd_3 des projizierenden Viereckes gibt (Afg. 43, Lösung 3) den Abstand des Punktes d von $\mathfrak{T}_3$, oder die gesuchte Entfernung der Geraden B von der Geraden A (siehe oben 2), womit die Aufgabe erledigt ist.

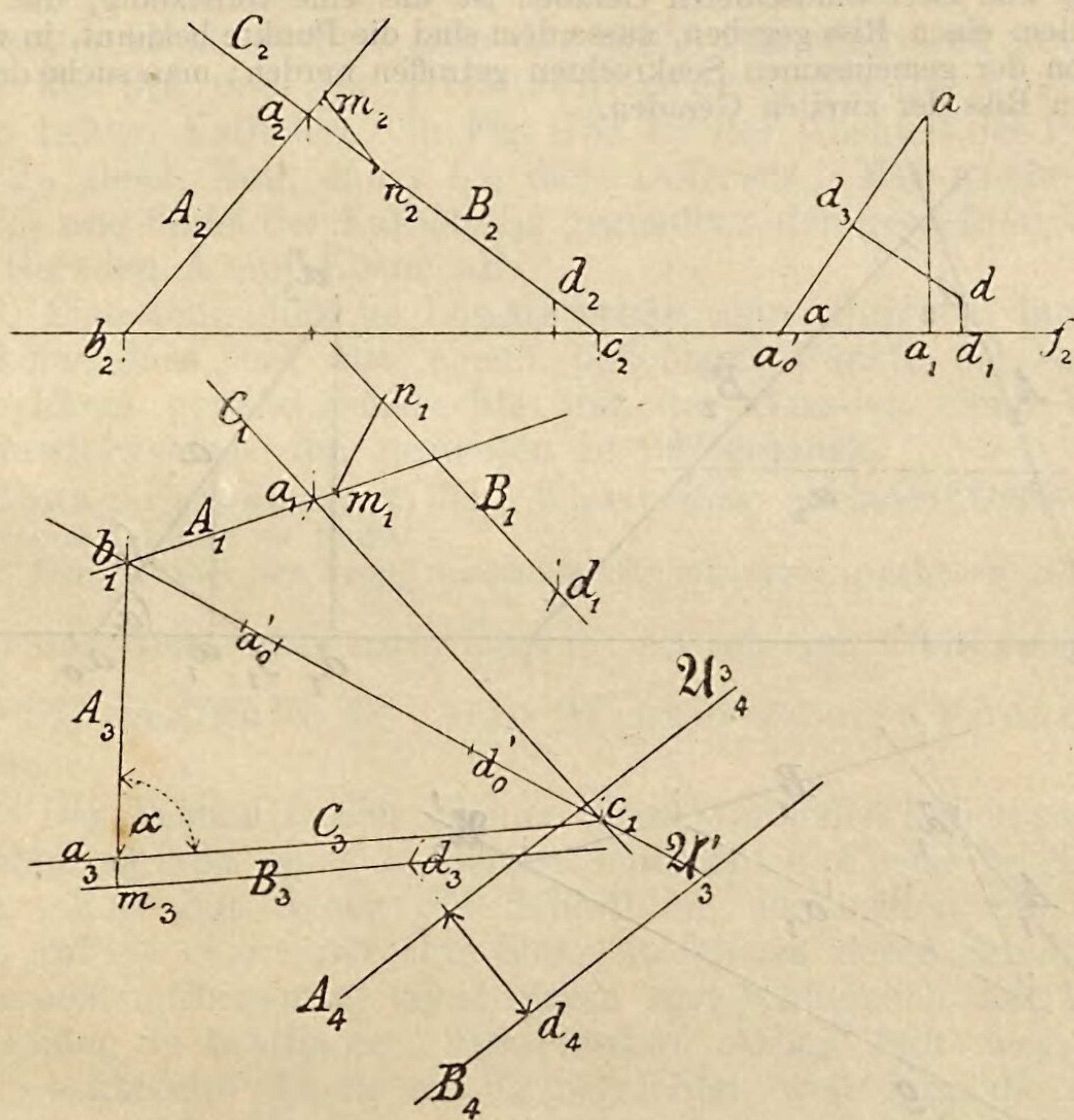


Fig. 72 u. 72a.

Wollte man übrigens, wie oben angedeutet, noch die vierten Risse von A u. B auf eine beliebige zu $\mathfrak{T}_3$ senkrechte Ebene $\mathfrak{T}_4$, so nehme man die $\mathfrak{U}_{34}$ beliebig; mit ihr fällt A_4 zusammen, da A_3 der $\mathfrak{T}_3$ angehört. Zur Bestimmung von d_4 hat man O_4 gleich dem dritten Abstand (§ 5) zu nehmen, welcher in dd_3 der Fig. 72a bereits gefunden ist, und durch d_4 die $B_4 \parallel A_4$ zu ziehen. Der Abstand zwischen A_4 u. B_4 ist der gesuchte.

Zusatz. Sollen auch die Risse des eben gefundenen Abstandes, d. h. der kürzesten Linie zwischen den windschiefen Gera-

den, angegeben werden, so beachte man, dass A_3 in $\mathcal{T}_3$ in wahrer Lage, B_3 die parallel zu sich selbst in ihrer dritten projizierenden Ebene verschobene Lage der B ist, mithin ihr Schnittpunkt m_3 den dritten Riss der zwei Punkte darstellt, in welchen die Geraden von jener kürzesten Linie getroffen werden. Aus m_3 gewinnt man durch die Achsenlote leicht m_1 in A_1 u. n_1 in B_1 , und die zugeordneten m_2 u. n_2 in A_2 u. B_2 .

Übungsaufgaben: 1) Die Entfernung zweier windschiefen Geraden zu suchen, von welchen die eine der ersten, die andere der zweiten Tafel parallel ist.

2) Die Entfernung der beiden Risse einer Geraden aufzusuchen.

3) Die Entfernung und den Winkel zweier gelehnten windschiefen Geraden zu finden.

4) Der Abstand der Geraden ab von der Achse zu suchen: a (0, 2, 3), b (4, 5, 4), oder a (0, 7, 8), b (9, 0, -5).

5) Von zwei windschiefen Geraden ist die eine vollständig, die andere nur in dem einen Riss gegeben, ausserdem sind die Punkte bekannt, in welchen beide von der gemeinsamen Senkrechten getroffen werden; man suche den noch fehlenden Riss der zweiten Geraden.

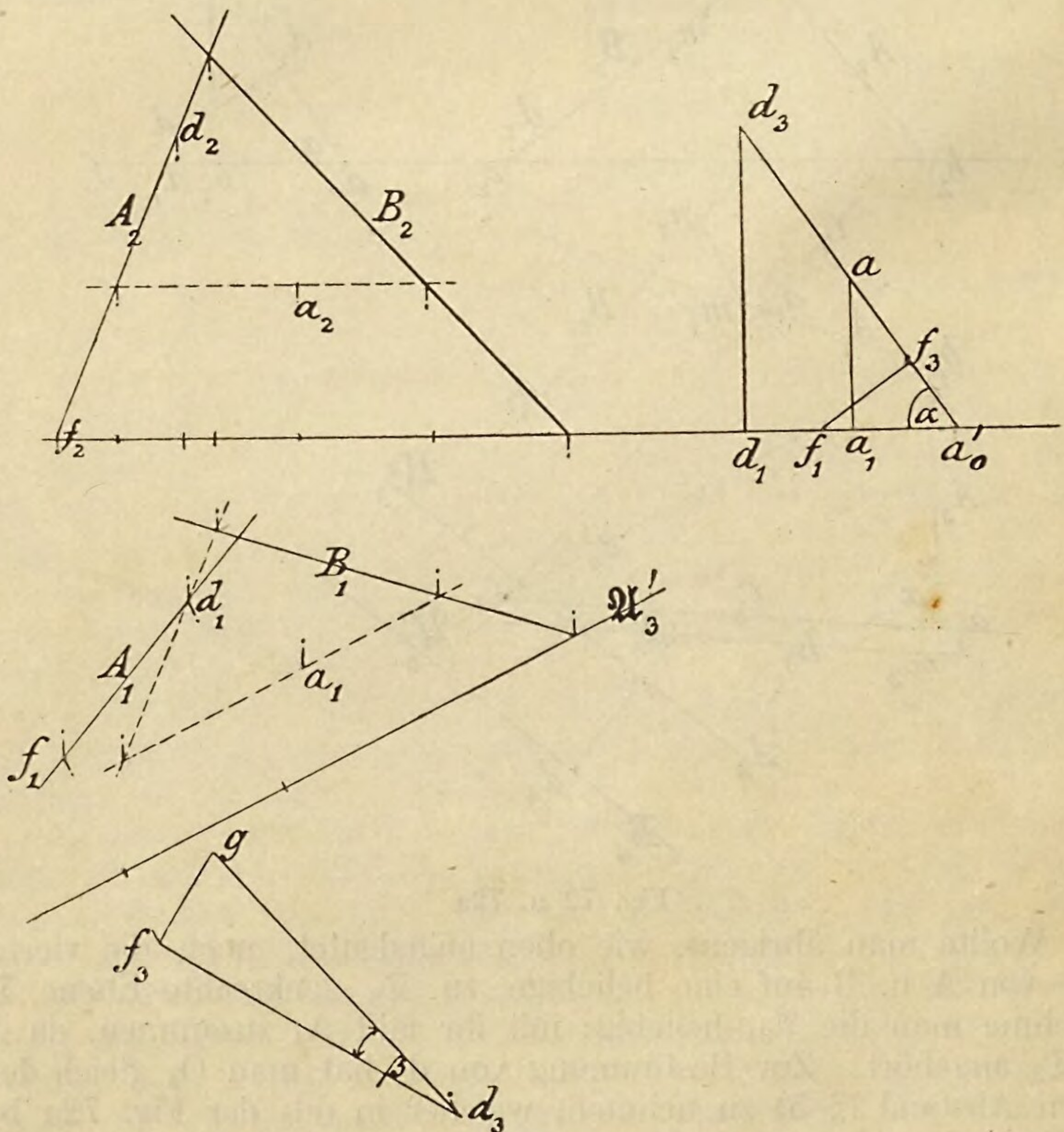


Fig. 73 u. 73a.

§ 53. Aufgabe 47. Den Winkel einer Geraden mit einer Ebene zu suchen.

1) Man projiziere die Gerade auf die Ebene und suche den Winkel der gefundenen Projektion und der Geraden (§ 44).

2) Man kann dabei die gegebene Ebene als $\mathfrak{T}_3$ auffassen und die Gerade in das System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ projizieren. In Fig. 73 sind A u. Ebene aB die gegebenen Stücke. Die erste Spur der Ebene ist $\mathfrak{A}_{13}$, der Winkel α des Systems findet sich in dem zu Punkt a gehörigen Neigungsdreieck $a_0'a_1a$ (Fig. 73a). Nun kann man, um A_3 zu finden, zu zwei beliebigen Punkten der A die projizierenden Vierecke konstruieren, zur Vereinfachung jedoch die Punkte so wählen, dass die Vierecke in Dreiecke übergehen. Dies ist der Fall für den Durchschnittspunkt d der A mit Ebene aB und für den Spurpunkt f. Die diesbezüglichen Dreiecke sind dann $a_0'd_1d_3$ u. $a_0'f_1f_3$, welchen die dritten Ordinaten $a_0'd_3$ u. $a_0'f_3$ entnommen werden. d_3f_3 (Fig. 73) ist der dritte Riss der Geraden, deren Winkel mit $\mathfrak{T}_3$ zu suchen ist. Nach § 44 konstruiert man das dritte Längendreieck zu df, bestehend aus d_3f_3 und der Differenz der dritten Abstände als den beiden Katheten. In Fig. 73a ist der Abstand des Punktes d von $\mathfrak{T}_3$ gleich Null, daher f_1f_3 diese Differenz. Man mache daher $f_3g = f_1f_3$ und findet der Kathete f_3g gegenüber den gesuchten Winkel β der Geraden A mit Ebene aB.

3) Eine sehr einfache Lösung erhält man übrigens durch die Bemerkung, dass eine aus einem beliebigen Punkte der Geraden auf die Ebene gefällte Senkrechte mit der Geraden einen Winkel einschliesst, welcher den gesuchten zu 90° ergänzt.

Übungsaufgaben: 1) Den Winkel einer gelehnten Geraden mit einer gelehnten Ebene zu finden.

2) Den Winkel der Projektionsachse ($\mathfrak{A}$) mit einer gegebenen Ebene zu finden.

3) Den Winkel eines ersten Lotes (a_1, A_2) mit einer Ebene zu suchen.

§ 54. Aufgabe 48. Den Winkel zweier Ebenen zu suchen.

1) Der Winkel zweier Ebenen wird von jenen Linien gebildet, in welchen sie von einer zu beiden senkrechten Ebene geschnitten werden. Man hat daher die Schnittlinie der beiden Ebenen zu suchen, auf sie eine senkrechte Ebene zu führen, deren Schnittlinien mit den beiden Ebenen zu konstruieren und schliesslich den Winkel dieser Linien zu bestimmen. Die letztere Arbeit fällt weg, wenn man die senkrechte Ebene als $\mathfrak{T}_3$ betrachtet, weil dann die dritten Risse der beiden Ebenen bereits den verlangten Winkel bilden. Ist b_1a_1 (Fig. 74) der erste Riss der Schnittlinie der gegebenen Ebene MA u. ST, so führe man die neue $\mathfrak{T}_3$ durch die erste Spur a_1 , es wird dann $A_{13} \perp b_1a_1$. Zur Bestimmung des Systemwinkels $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ suche man, um die Konstruktion der zweiten Ebenenspur der $\mathfrak{T}_3$ zu ersparen, den Winkel α' der ba mit $\mathfrak{T}_1$ (Längendreieck a_1b_1b Fig. 74a) und vermehre ihn um 90° ($\nless b_1a_1m$). Für die beliebigen Punkte c der Ebene MN u. d der Ebene ST sind nun die projizierenden Vierecke $a_1c_1cc_3$ u. $a_1d_1dd_3$ gezeichnet und in a_1c_3 und a_1d_3 die dritten Ordinaten gefunden, welche c_3 u. d_3 in Fig. 74 geben. Der Winkel $c_3a_1d_3$ ist der gesuchte.

2) Auch hier leitet der Satz, dass der spitze Winkel zweier Ebenen gleich dem spitzen Winkel zweier aus einem beliebigen Raumpunkt auf je eine Ebene gefällten Senkrechten ist, auf eine weitere einfache Konstruktion.

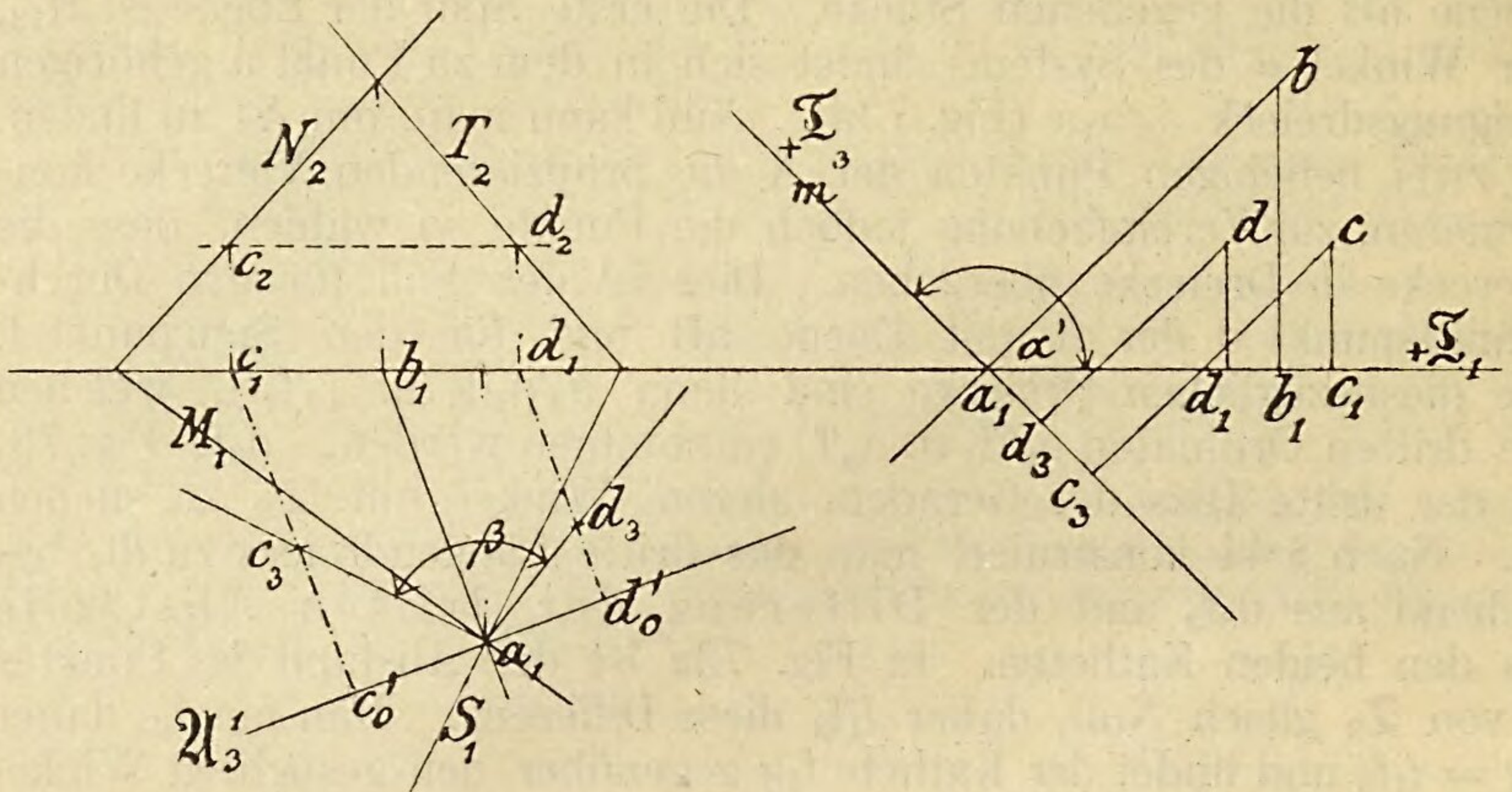


Fig. 74 u. 74a.

Übungsaufgaben: 1) Den Winkel zweier Ebenen zu suchen, wenn eine oder beide Ebenen Lotebenen sind.

2) Den Winkel zweier gelehnten Ebenen zu finden.

3) Den Winkel zweier Ebenen zu suchen, von denen ein Paar gleichnamiger Spuren parallel läuft.

4) Den Winkel einer Ebene mit einer der Halbierebenen des Systems zu suchen.

5) Den Winkel zweier Ebenen zu halbieren.

6) Man suche den Winkel zweier Ebenen, von denen jede durch die Achse und einen Punkt ausser ihr bestimmt ist.

7) Man suche den Winkel zweier Ebenen, welche durch je eine gelehnte Gerade und einen (gemeinsamen) Punkt gegeben sind.

§ 55. Aufgabe 49. Durch einen gegebenen Punkt Gerade zu legen, welche mit den Tafeln vorgeschriebene Winkel bilden. (Umkehrung der Aufgabe 41.)

Die gesuchten Risse einer solchen Geraden erscheinen nach Afg. 41 als Katheten zweier rechtwinkliger Dreiecke, welche die Länge eines beliebigen Stückes der Geraden als gemeinsame Hypotenuse, die Differenzen gleichnamiger aber zugeordneter Ordinaten als weitere Katheten und ihnen gegenüber die Winkel mit den Tafeln enthalten.

Da der noch fehlende Punkt b der Geraden beliebig ist, so wird dadurch auch die Hypotenuse der Dreiecke willkürlich. Man trage daher den gegebenen Winkel α mit $\mathcal{T}_1$ (Fig. 75a) irgendwo auf ($\angle b_1 a_1 b$), fälle von dem beliebigen Punkte b eines Schenkels ein Lot bb_1 auf den andern, dann ist $a_1 b_1$ die Länge des ersten Risses der gewählten Strecke ab und ein aus a_1 (Fig. 75) mit $a_1 b_1$ beschriebener Kreis ist geometrischer Ort für b_1 . Nun trage man (Fig. 75a) an $a_1 b$ in b den Winkel β mit $\mathcal{T}_2$ an, und fälle aus a_1 die Senkrechte $a_1 c_2$ auf den anderen Winkelschenkel, dann ist $a_1 c_2$

die Differenz der ersten Ordinaten der Punkte a u. b u. bc_2 die Länge des zweiten Risses der Geraden ab . Errichtet man sodann in a_1 (Fig. 75) eine Senkrechte zur Achse und schneidet auf ihr nach beiden Seiten von a_1 hin die Stücke $a_1m_1 = a_1n_1 = a_1c_2$ ab, so sind die durch m_1 u. n_1 zur Achse parallel geführten Geraden weitere geometrische Örter für b_1 und dadurch 4 Lagen von b_1 gefunden. Die zweiten Risse liegen schliesslich in dem aus a_2 mit bc_2 beschriebenen Kreise.

Der gestellten Bedingung entsprechen 4 Gerade b_1b_1'' , b_2b_2'' ; b_1b_1''' , b_2b_2''' ; $b_1'b_1''''$, b_2b_2'''' .

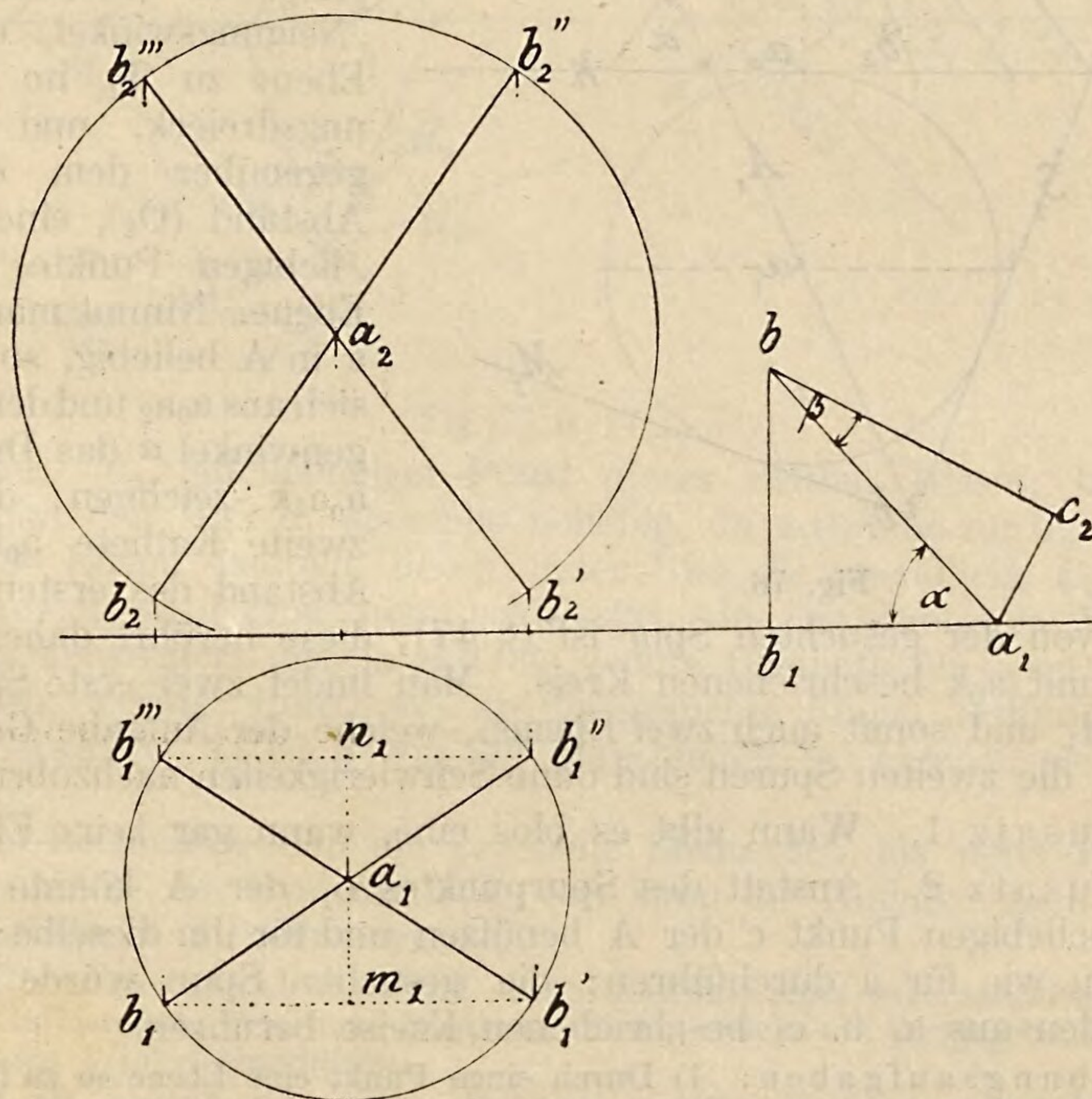


Fig. 75 u. 75a.

Zusatz. Wird in der Fig. 75a die $a_1c_2 = a_1b_1$, dann werden die Parallelen durch m_1 u. n_1 Tangenten an den Kreis und man erhält bloß 2 Gerade (gelehnt), für welche wegen der Kongruenz der Dreiecke a_1b_1b und a_1bc_2 die Winkel $\alpha + \beta = 90^\circ$ sein müssen. — Wird dagegen $a_1c_2 > b_1a_1$, was dann der Fall ist, wenn $\alpha + \beta > 90^\circ$ ist, so liefert die Lösung gar keine Gerade und die Aufgabe ist unmöglich. (Vergl. § 45.)

Übungsaufgaben: 1) Durch Punkt a eine Gerade zu ziehen, welche zu $\mathfrak{T}_1$ parallel ist und mit $\mathfrak{T}_2$ einen Winkel $\beta = 30^\circ$ bildet.

2) Durch den Punkt a eine gelehnte Gerade zu legen, welche mit $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\alpha = 36^\circ$ bildet.

§ 56. Aufgabe 50. Durch eine gegebene Gerade

eine Ebene zu legen, welche mit einer Tafel einen gegebenen Winkel einschliesst.

Zur Kenntnis der Ebene ist noch eine Gerade erforderlich, als welche sich eine der Spuren empfiehlt. Ist A (Fig. 76) die ge-

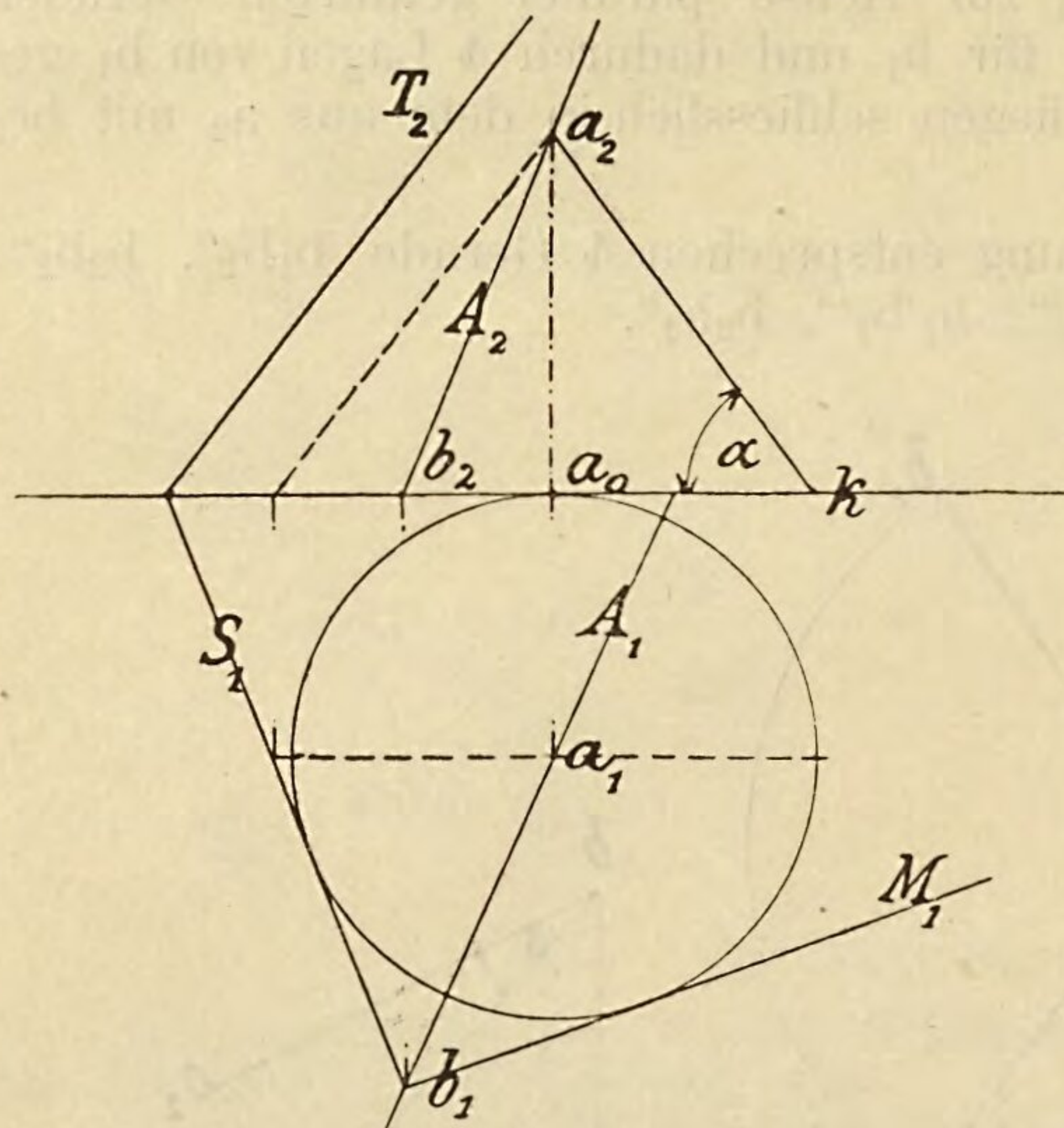


Fig. 76.

bene Gerade und α der Winkel der Ebene mit $\mathcal{T}_1$, so geht die erste Spur der Ebene durch den ersten Spurpunkt b_1 der Geraden A. Nach Aufg. 42 erscheint der Neigungswinkel einer Ebene zu $\mathcal{T}_1$ im Neigungsdreieck, und zwar gegenüber dem ersten Abstand (O_2), eines beliebigen Punktes der Ebene. Nimmt man nun a in A beliebig, so lässt sich aus a_0a_2 und dem Gegenwinkel α das Dreieck a_0a_2k zeichnen, dessen zweite Kathete a_0k der Abstand des ersten Risses

ses a_1 von der gesuchten Spur ist (§ 47); diese berührt daher den aus a_1 mit a_0k beschriebenen Kreis. Man findet zwei erste Spuren S_1 u. M_1 und somit auch zwei Ebenen, welche der Aufgabe Genüge leisten; die zweiten Spuren sind ohne Schwierigkeiten nachzubringen.

Zusatz 1. Wann gibt es blos eine, wann gar keine Ebene?

Zusatz 2. Anstatt des Spurpunktes b_1 der A könnte man jeden beliebigen Punkt c der A benützen und für ihn dieselbe Konstruktion wie für a durchführen; die gesuchte Spur würde dann die beiden aus a_1 u. c_1 beschriebenen Kreise berühren.

Übungsaufgaben: 1) Durch einen Punkt eine Ebene so zu führen, dass sie auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht und zu einer der Tafeln eine gegebene Neigung hat.

2) Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, welche mit einer anderen gegebenen Ebene einen bestimmten Winkel bildet. (Einführung der gegebenen Ebene als neue Tafel.)

§ 57. Aufgabe 51. Durch eine in gegebener Ebene liegende Gerade eine Ebene zu legen, welche mit der gegebenen Ebene einen bekannten Winkel einschliesst. (Umkehrung der Aufg. 48.)

Nach Aufgabe 48 nehme man eine $\mathcal{T}_3$ senkrecht auf die gegebene Gerade ab (Fig. 77), der Schnittlinie der gegebenen und der gesuchten Ebene, suche den dritten Riss der gegebenen Ebene MN, trage an ihn den gegebenen Winkel β und projiziere den so gefundenen dritten Riss der gesuchten Ebene in $\mathcal{T}_1$ u. $\mathcal{T}_2$ zurück. In Fig. 77 ist $\mathcal{U}_{13}$ senkrecht zu b_1a_1 in deren Spurpunkt a_1 gelegt, der Winkel α' der Geraden mit $\mathcal{T}_1$ in Fig. 77a aufgesucht und um 90°

vermehrt worden, um so den Systemwinkel b_1a_1m zu erhalten. Den beliebigen Punkt c der Ebene MN hat man mittelst des projizierenden Vierecks $a_1c_1cc_3$ nach c_3 projiziert, an a_1c_3 den Winkel $c_3a_1d_3 = \beta$ getragen, und in a_1d_3 den dritten Riss der gesuchten Ebene ST

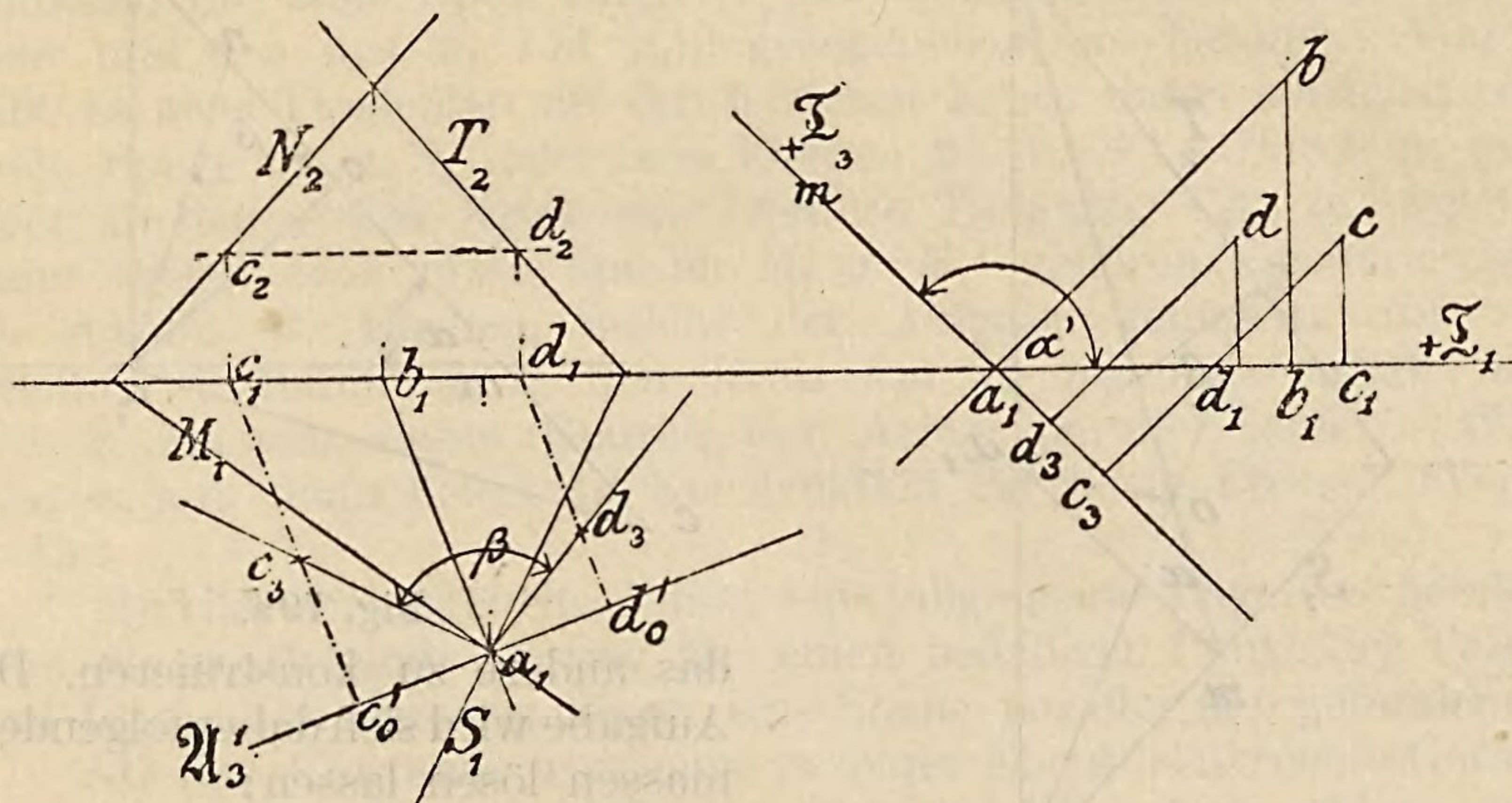


Fig. 77 u. 77 a.

gefunden. d_3 , ein beliebiger Punkt dieses dritten Risses, hat im Achsenlot den Riss d_1 ebenfalls beliebig, da a_1d_3 eine zur $\mathcal{T}_1$ schiefstehende Ebene darstellt, deren erster Riss die unendliche $\mathcal{T}_1$ selbst ist. Aus d_3 u. d_1 hat man schliesslich das projizierende Viereck $a_1d_1dd_3$ konstruiert und in d_1d die zweite Ordinate für den Punkt d gefunden, welcher Punkt mit ab die gesuchte Ebene bestimmt.

Zusatz. 1) Ist β von 90° verschieden, so ergeben sich zwei Ebenen.

2) Betrachtet man die gegebene Ebene MN als neue Projektionsebene $\mathcal{T}_3$ des Systems $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3$, so kann die Aufgabe nach § 48, Übungsaufgabe 3, gelöst werden.

Übungsaufgabe: Durch die Schnittlinie einer gegebenen Ebene mit der I. Halbierebene eine neue Ebene zu führen, welche mit der gegebenen einen bestimmten Winkel einschliesst.

§ 58. Aufgabe 52. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit beiden Tafeln vorgeschriebene Winkel bildet. (Umkehrung der Aufg. 42.)

1) Wir lösen die Aufgabe zunächst für den Fall, dass der gegebene Punkt a einer der Tafeln ($\mathcal{T}_2$) angehört.

Wäre umgekehrt die Ebene ST bekannt und würden die Winkel α und β mit den Tafeln gesucht, so hätten wir durch den Punkt a_1 der Achse je eine Ebene senkrecht zur gegebenen und zur betreffenden Tafel zu führen. Jede dieser Ebenen würde die gegebene und die Tafel in einem rechtwinkligen Dreiecke a_1ma_2 (Fig. 78) und a_1nc schneiden, welche Dreiecke ausser den Abständen des Punktes a_1 von den jeweiligen Spuren noch die Winkel α u. β enthielten. Nun steht die Schnittlinie a_1o dieser beiden Lotebenen auf der gegebenen Ebene senkrecht und trifft diese in o , dem Schnittpunkt beider Hypotenusen. Die beiden vorhin erwähnten

Dreiecke haben demnach die Höhe auf die Hypotenuse gemeinsam, und diese Eigenschaft dient dazu, neben dem einen Dreieck sofort

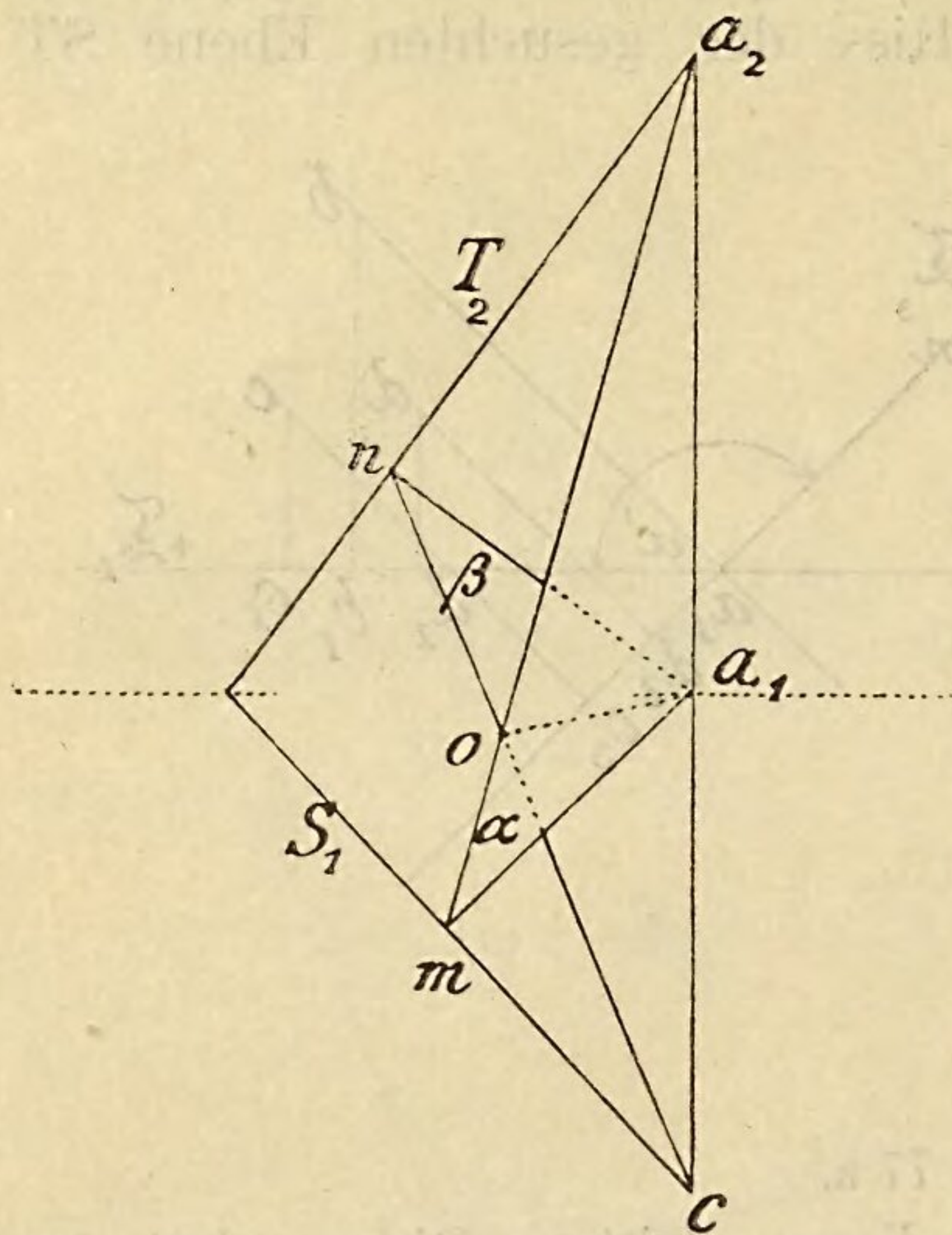


Fig. 78.

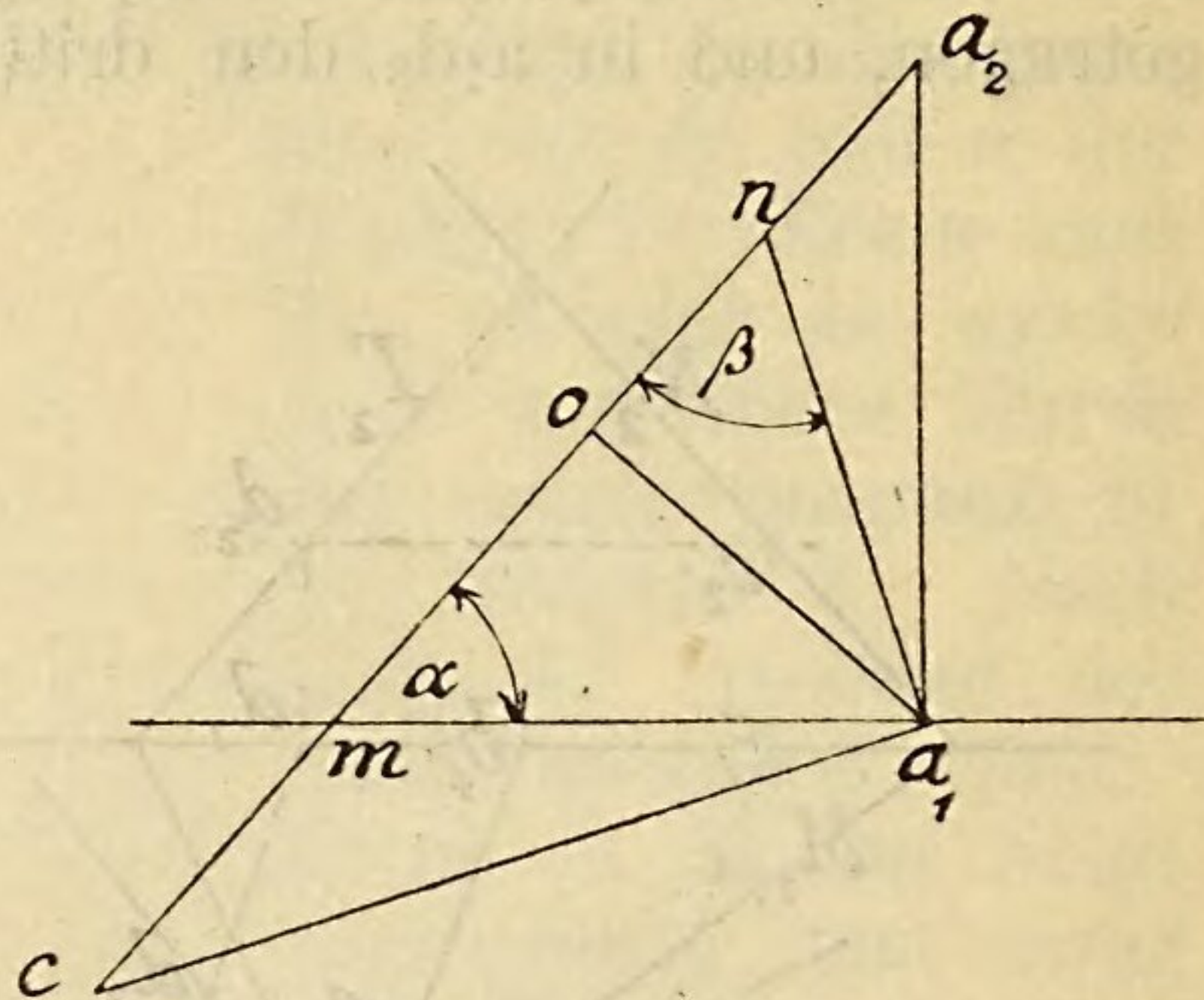


Fig. 79 a.

das andere zu konstruieren. Die Aufgabe wird sich daher folgendermassen lösen lassen:

Man konstruiere Fig. 79^a aus Kathete a_1a_2 und dem Gegenwinkel α das rechtwinklige Dreieck a_1ma_2 , welches in a_1m die Entfer-

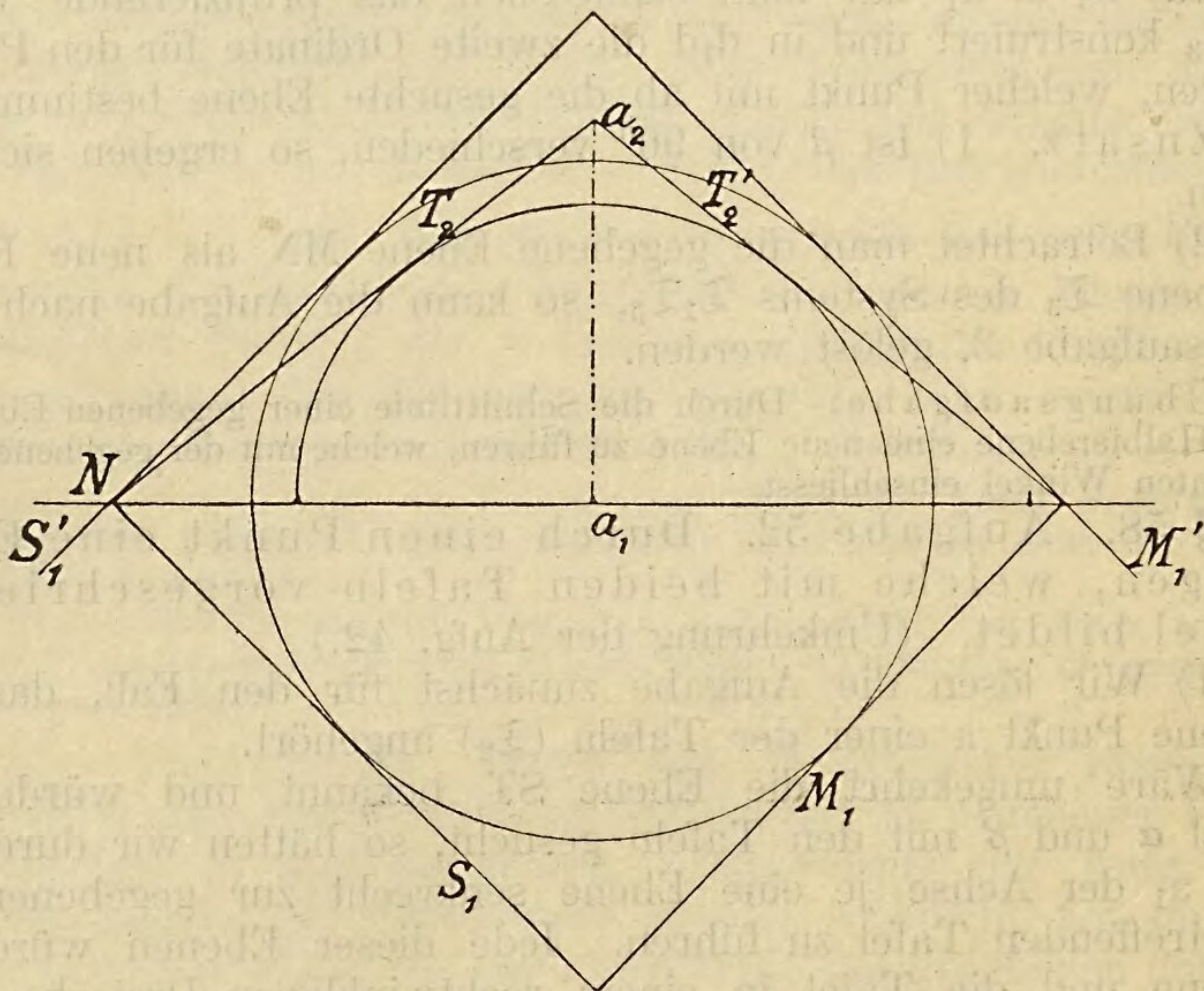


Fig. 79.

nung des Punktes a_1 von der ersten Spur der gesuchten Ebene liefert. Die Höhe a_1o des Dreiecks ist auch dem zweiten Dreieck gemeinsam; man ziehe daher a_1n gegen die Hypotenuse unter dem

Winkel β , und $a_1c \perp a_1n$, um in a_1nc jenes zweite Dreieck zu erhalten, welches in a_1n den Abstand des Punktes a_1 von der zweiten Spur der gesuchten Ebene liefert. Diese selbst ist (Fig. 79) Tangente (T_2) durch a_2 an den mit a_1n aus a_1 beschriebenen Kreis, während die erste Spur durch N , den Schnittpunkt mit der Achse, geht und den aus a_1 mit a_1m gezogenen Kreis berührt. Von N gibt es zwei Tangenten an den letzteren Kreis, daher zunächst zwei erste Spuren S_1 u. S_1' oder zwei Ebenen ST u. $S'T$. Durch a_2 geht aber an den ersten Kreis eine weitere Tangente T_2' , zu welcher dann wieder zwei erste Spuren M_1 u. M_1' gehören, wodurch sich die Anzahl der Ebenen, welche der Aufgabe genügen, auf vier erhöht. — Kommt a_2 in den Kreis a_1n zu liegen, so erhält man bloß 2 Ebenen, deren Spuren der Achse parallel laufen. Wird $a_1a_2 < a_1n$, dann liefert die Konstruktion gar keine Ebene. (Vergl. § 49.)

2) Hat der gegebene Punkt eine allgemeine Lage, so benütze man die vorstehende Lösung für einen beliebigen Punkt der Tafeln und lege durch den gegebenen eine Ebene parallel der gefundenen.

3) Der Umstand, dass eine zu einer Ebene senkrechte Gerade mit den Tafeln Winkel bildet, welche die Winkel der Ebene mit den gleichnamigen Tafeln zu 90° ergänzen, führt auf eine weitere Lösung mittelst Aufgabe 49 und Aufgabe 32.

§ 59. Übungsaufgaben zu dem VI. Kapitel.

1) Den geometrischen Ort des Punktes zu konstruieren, welcher von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand hat.

2) Denjenigen Punkt einer Geraden zu bestimmen, welcher von 2 gegebenen Punkten gleichweit absteht.

3) Den geometrischen Ort des Punktes zu finden, welcher von zwei gegebenen Ebenen gleiche Entfernung hat.

4) In einer gegebenen Geraden jenen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Ebenen gleichweit absteht.

5) Den geometrischen Ort des Punktes zu suchen, welcher von 3 gegebenen Punkten gleiche Entfernung hat.

6) In einer gegebenen Ebene denjenigen Punkt zu finden, welcher von 3 gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist.

7) In einer gegebenen Ebene jene Gerade zu ziehen, welche von zwei ausserhalb der Ebene gegebenen Punkten gleichen Abstand hat.

8) Den geometrischen Ort des Punktes zu suchen, welcher von zwei sich schneidenden Ebenen je gegebenen Abstand hat.

9) In einer gegebenen Ebene denjenigen Punkt zu suchen, welcher von zwei sich schneidenden Ebenen je bestimmte Entfernung hat.

10) Den Punkt zu suchen, welcher von 3 sich schneidenden Ebenen je bestimmte Entfernung hat.

11) Den Punkt zu finden, welcher von 2 gegebenen Ebenen je bestimmten Abstand hat und von 2 gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist.

12) Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu führen, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat.

13) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche von drei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen besitzt.

14) Durch die Schenkel eines gegebenen Winkels zwei Ebenen so zu führen, dass ihr Winkel gleich dem gegebenen wird.

15) Den Punkt zu finden, welcher von 2 gegebenen Punkten und einer gegebenen Ebene gleiche Abstände hat.

16) Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, welche von einem gegebenen Punkt eine bestimmte Entfernung hat.

(Lösung mit Hilfe einer $\mathfrak{T}_3$ senkrecht zur gegebenen Geraden.)

17) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer gegebenen Geraden in einem bestimmten Abstände parallel läuft.

18) In einer gegebenen Ebene durch einen bekannten Punkt derselben diejenige Gerade zu ziehen, welche von einem ausserhalb der Ebene gegebenen Punkt eine bekannte Entfernung hat.

(Lösung mit Hilfe einer $\mathfrak{T}_3$, welche mit der gegebenen Ebene zusammenfällt.)

19) In einer gegebenen Ebene parallel einer gegebenen Geraden derselben diejenige Gerade zu ziehen, welche von einem ausserhalb gegebenen Punkt eine bekannte Entfernung hat.

20) In einer gegebenen Ebene durch einen bekannten Punkt derselben jene Gerade zu ziehen, welche mit einer der Tafeln einen vorgeschriebenen Winkel einschliesst.

(Man suche den in der gegebenen Tafel liegenden Spurpunkt der Geraden.)

21) In einem Punkte einer gegebenen Geraden eine Senkrechte auf der Geraden zu errichten, welche mit einer der Tafeln einen gegebenen Winkel bildet.

22) In einer gegebenen Ebene eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene Senkrechte zu einer Tafel unter einem gegebenen Winkel schneidet.

23) Eine Gerade der $\mathfrak{T}_1$ zu suchen, welche von einem gegebenen Punkte einen bekannten Abstand hat und mit $\mathfrak{T}_2$ einen gegebenen Winkel bildet.

24) In einer geg. Ebene eine Gerade zu zeichnen, welche von einem geg. Punkte eine geg. Entfernung hat und mit einer der Tafeln einen bestimmten Winkel einschliesst.

25) In einer von zwei windschiefen Geraden denjenigen Punkt zu suchen, welcher von der andern eine bestimmte Entfernung hat.

VII. Kapitel.

Geschlossene ebene Figuren.

(Polygone.)

§ 60. Aufgabe 53. Die wahre Gestalt eines durch seine Eckpunkte gegebenen Dreiecks anzugeben.

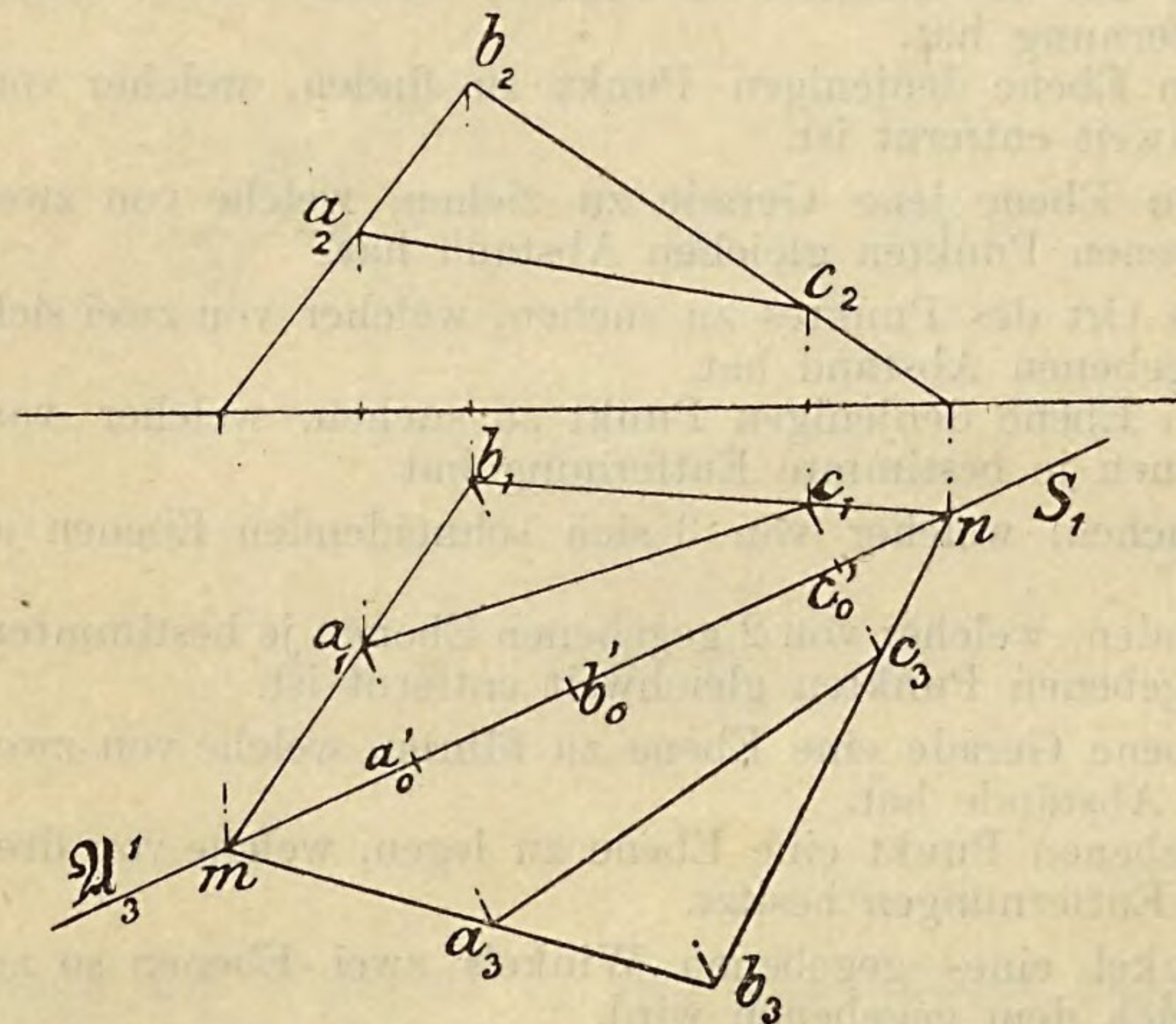


Fig. 80.

Man nimmt die Ebene des Dreiecks abc (Fig. 80) als $\mathfrak{T}_3$, erhält in der ersten Spur S_1 die Achse ($\mathfrak{A}_{13}$) des Systems $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$, dann nach § 39 mittelst rechtwinkliger Dreiecke die dritten Ordinaten der Punkte und die dritten Risse a_3, b_3, c_3 , welche das wirkliche Dreieck bestimmen.

Da man in jedem Tafelsystem die eine Tafel um die Schnittlinie oder Achse um-

zulegen (umzuklappen) hat, bis sie mit der andern zur Zeichenebene zusammenfällt, so kann der in der umgelegten Tafel gezeichnete Riss eines ihr angehörigen Gebildes auch als Umlegung oder Umklappung des wirklichen Gebildes angesehen werden. Das Dreieck $a_3b_3c_3$ der Fig. 80 kann die Umklappung des Dreiecks abc (um die erste Spur seiner Ebene) in die erste Tafel genannt werden.

§ 61. Das Umlegen eines ebenen Gebildes in eine Tafel lehrt uns den gegenseitigen Zusammenhang zwischen umgelegtem Original und seinem entsprechenden Risse, oder die geometrische Abhängigkeit beider erkennen.

Zunächst ist klar, dass jedem Risspunkt und jeder Rissgeraden immer nur ein umgelegter Punkt oder eine umgelegte Gerade entspricht, dass ferner die Verbindungslinien solcher entsprechender Punkte (a_1a_3 , b_1b_3 u. s. w.) als Achsenlote zu einander parallel laufen. Sodann ist leicht einzusehen, dass diejenigen Punkte m , n u. s. w., welche in der Umklappungsachse selbst liegen, mit ihrer Umlegung zusammenfallen, dass folglich, wenn man eine Rissgerade bis zu ihrem Schnittpunkte mit der Umklappungsachse verlängert, auch die umgelegte Gerade durch diesen Punkt gehen muss, oder wie man sich ausdrückt, dass entsprechende Gerade (a_1b_1 u. a_3b_3) sich stets in Punkten ein und derselben Geraden, nämlich der Schnittlinie der beiden Ebenen, schneiden müssen.

Ebene Gebilde, welche so liegen, dass jedem Punkte und jeder Geraden des einen nur ein Punkt und eine Gerade des andern entspricht, dass ferner die Verbindungslinien entsprechender Punkte unter einander parallel sind, dass endlich entsprechende Gerade sich sämtlich in Punkten einer einzigen Geraden schneiden, nennt man „affin verwandte“ oder kurz „affine“ Gebilde. Die Gerade, welche die Schnittpunkte aller entsprechenden Geraden enthält, heisst die Affinitätsachse, die Richtung der Geraden, welche entsprechende Punkte verbinden, die Affinitätsrichtung.

Demgemäss kann man sagen: Der Riss einer ebenen Figur und ihre Umlegung in die gleiche Tafel*) sind affin; die Affinitätsachse ist die Spur der Ebene der Figur, und die Affinitätsrichtung geht senkrecht zur Affinitätsachse.

Ist nun das eine zweier affiner Gebilde (Riss oder Umlegung) und die Affinitätsachse gegeben, und dazu nur ein Paar entsprechender Punkte bekannt, so lassen sich alle übrigen Punkte mit Hilfe entsprechender Geraden d. h. nur mittelst des Lineals, und ohne Rücksichtnahme auf die zugeordneten Risse auffinden. Man suche (Fig. 80) etwa a_3 auf gewöhnlichem Wege, verlängere dann a_1b_1 u. b_1c_1 bis zum Schnitt mit der Affinitätsachse S_1 in m u. n , und verbinde diese Punkte mit a_3 , dann sind diese Linien

*) Dabei ist es vollkommen gleichgiltig, nach welcher Seite die Umlegung der Ebene erfolgt.

die entsprechenden Geraden zu a_1b_1 u. b_1c_1 ; in ihnen und zwar in ihren Schnittpunkten mit der Affinitätsrichtung ($b_1b_3 \perp S_1$, $c_1c_3 \perp S_1$) liegen b_3 u. c_3 .

Zusatz: Es ist leicht einzusehen, dass die Umlegung des Dreiecks nicht gerade um die Spur erfolgen muss, sondern auch um jede beliebige Spurparallele geschehen kann, welche dann auch zur Affinitätsachse wird.

Anmerkung. Die Verwertung der eben entwickelten Eigenschaften affiner Gebilde bietet, wie aus dem gegebenen Beispiele erhellt, grosse und mannigfache Vorteile für ein schnelles und genaues Zeichnen, besonders wenn man bedenkt, dass man entsprechende Punkte in verschiedener Aufeinanderfolge zu entsprechenden Geraden verbinden kann, unter welchen man die zum Zeichnen bequemste und vorteilhafteste wählen wird.

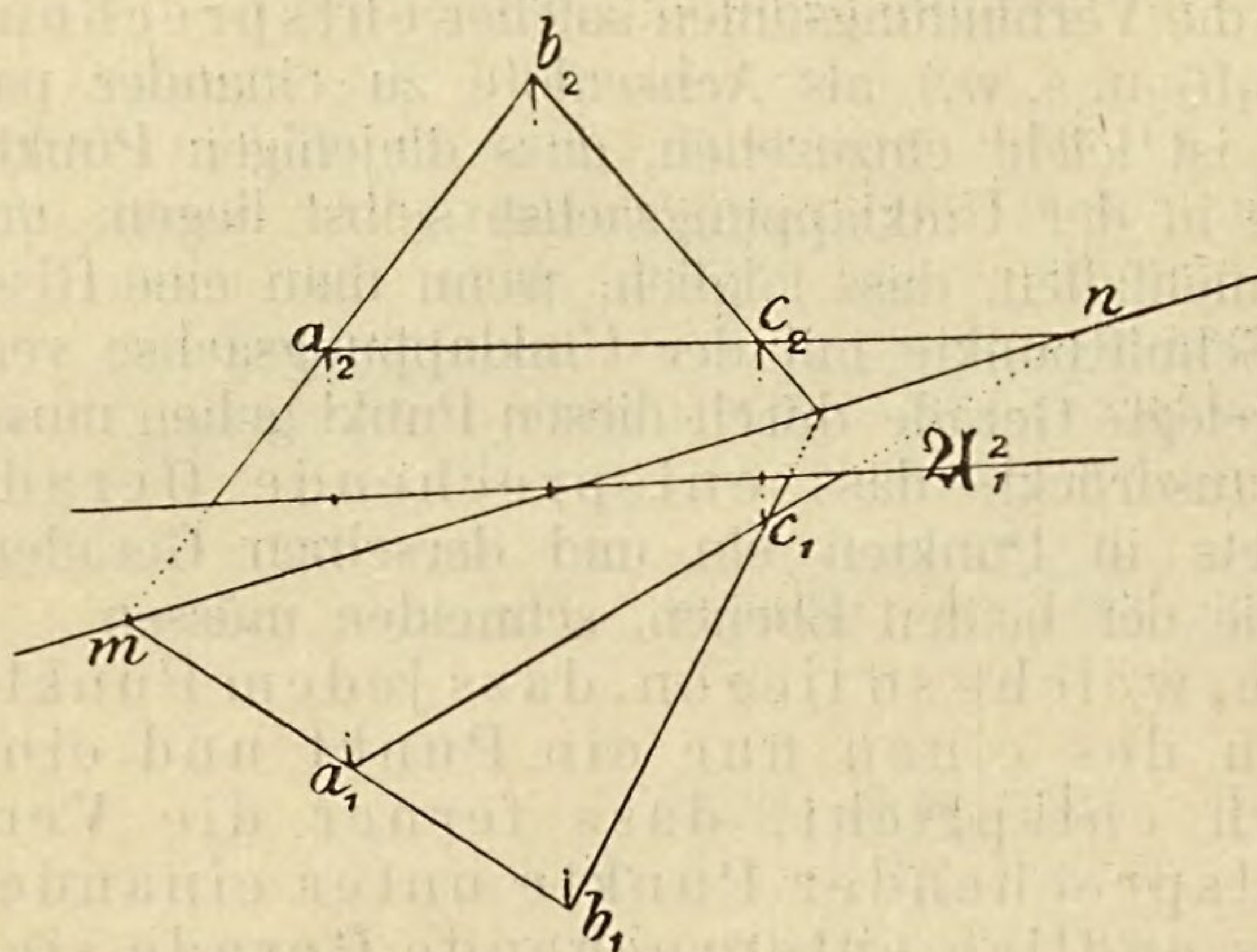


Fig. 81.

chende Gerade (a_1b_1 und a_2b_2 , a_1c_1 und a_2c_2) in Punkten, welche der II. Halbierebene des Tafelsystems angehören. Die Affinitätsachse (mn) ist mithin die Schnittgerade der Ebene (abc) des Gebildes mit der II. Halbierebene.

Anmerk. Man beachte, dass hier die Affinitätsrichtung zur Affinitätsachse schief geht.

§ 63. Verschiedene Aufgaben:

1) Ein durch seine Risse gegebenes Dreieck zu einem ebenen Polygon zu ergänzen.

Mit den Punkten a , b , c ist die Ebene des Dreiecks gegeben; sollen nun weitere Punkte in dieser Ebene angenommen werden, so bleibt blos ein Riss (d_1) willkürlich, während der andere (d_2) nach Aufg. 15 gefunden werden könnte. Man kann aber auch die Affinität beider Risse benützen, zuerst a_1b_1 und a_2b_2 bis zum gegenseitigen Schnitt in m , ebenso a_1c_1 u. a_2c_2 bis zum Durchschnit in n verlängern und so in mn die Affinitätsachse herstellen. Entsprechende Gerade sind dann $a_1d_1s_1$ u. s_1a_2 , ebenso $b_1d_1t_1$ u. t_1a_2 , und muss d_2 im Durchschnitt von a_2s_1 u. b_2t_1 liegen. (Kontrolle mittelst des Achsenlotes.)

§ 62. Der erste und zweite Riss eines orthogonal projizierten ebenen Gebildes sind ebenfalls affin. Zuvörderst nämlich entspricht jedem Punkt (a_1) einer Tafel (Fig. 81) ein Punkt (a_2) der andern, ferner sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte (a_1a_2 , b_1b_2) einander parallel, endlich schneiden sich (§ 8) entsprechende

- 2) In einem gegebenen Dreieck ist
 a) der Mittelpunkt des um- und eingeschriebenen Kreises,
 b) der Schnittpunkt der Höhen,
 c) der Schwerpunkt zu suchen.

Man lege das Dreieck in eine der Tafeln um, suche im umgeklappten Dreieck nach geometrischen Regeln den verlangten Punkt und projiziere diesen in die Tafeln zurück. (Affinität.)

Hinsichtlich der Aufg. c ist zu bemerken, dass die Halbierungspunkte gegebener Strecken (§ 46, 3) zu Rissen die Halbierungspunkte der Streckenrisse haben. Die Risse des Schwerpunktes findet man daher im Schwerpunkte eines jeden Rissdreieckes.

- 3) In gegebener Ebene ein reguläres Vieleck aus gegebenem Mittelpunkt und mit gegebenem Radius zu zeichnen.

- 4) Auf zwei gegebenen sich schneidenden Geraden sind zwei Punkte als Ecken eines gleichseitigen Dreiecks angenommen, dasselbe zu zeichnen.

- 5) Ein gegebener Punkt ist Mittelpunkt eines Quadrats, dessen eine Seite mit einer geg. Geraden zusammenfällt; das Quadrat zu zeichnen.

- 6) Ein gegebener Punkt ist Ecke eines Quadrats, dessen Ebene auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht und das in dieser Geraden seinen Mittelpunkt hat; das Quadrat zu zeichnen.

- 7) Zwei Punkte sind Gegenecken eines Rechteckes, dessen Ebene mit einer der Tafeln einen bestimmten Winkel bilden und dessen eine Seite einer der Tafeln parallel werden soll; das Rechteck zu zeichnen.

- 8) Zwei Punkte sind Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks, die durch den einen gehende Seite desselben soll mit den Tafeln bestimmte Winkel einschliessen; das Dreieck zu zeichnen.

- 9) Ein Punkt ist als Ecke eines regulären Fünfecks von bekannter Seitenlänge gegeben, die Ebene des Fünfecks bildet mit den Tafeln vorgeschriebene Winkel, und die durch den geg. Punkt gehende Seite einen bestimmten Winkel mit $\mathfrak{T}_1$; das Fünfeck zu zeichnen.

- 10) Von einem ebenen Fünfeck sind 3 Punkte vollständig, von den beiden andern nur die Risse in einer Tafel gegeben; man bestimme die wahre Gestalt des Fünfecks ohne die fehlenden Risse erst zu suchen.

- 11) Eine Gerade zu suchen, welche von drei gegebenen parallelen Geraden gleichen Abstand hat.

- 12) Eine Gerade zu suchen, welche von 2 gegebenen parallelen Geraden je bestimmte Entfernung hat.

- 13) In einer gegebenen Ebene durch einen bekannten Punkt derselben eine Gerade so zu ziehen, dass sie mit den Spuren der Ebene gleiche Winkel bildet.

- 14) In einer gegebenen Ebene durch einen bekannten Punkt derselben eine Gerade zu ziehen, welche von einem andern gegebenen Punkt der Ebene eine bestimmte Entfernung hat.

- 15) Es sind zwei parallele Gerade gegeben; durch einen be-

kannten Punkt ihrer Ebene eine Gerade so zu ziehen, dass das zwischen die Parallelen fallende Stück eine bestimmte Länge hat.

16) Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels diejenige Strecke zu ziehen, welche in diesem Punkte halbiert wird.

17) Zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels eine Strecke von vorgeschriebener Länge einzuschalten, welche überdies zu einer der Tafeln eine gegebene Neigung hat.

§ 64. Um eine Beziehung zwischen dem Flächeninhalt (F) eines Dreiecks und jenem (F_1) seiner Projektion herzustellen, zerlege man das beliebig gelegene Dreieck durch eine von einem Eck auslaufende Spurparallele in zwei Teile (f u. f'), dann ist, wenn g die Länge der Spurparallelen, h u. h' die Höhen auf g , und α der Neigungswinkel der Ebene des Dreiecks zu $\mathcal{T}$ ist:

$$F = f + f' = \frac{1}{2} g (h + h'),$$

$$F_1 = f_1 + f_1' = \frac{1}{2} g (h + h') \cos \alpha, \text{ oder}$$

$$F_1 = F \cos \alpha,$$

welcher Satz sich leicht auf jedes ebene Polygon ausdehnen lässt.

II. Abschnitt.

Räumliche Gebilde.

VIII. Kapitel.

Das körperliche Dreieck.

(Dreikant.)

§ 65. Drei nicht in einer Ebene liegende Gerade, welche sich in einem Punkte schneiden, bestimmen paarweise drei Ebenen, die

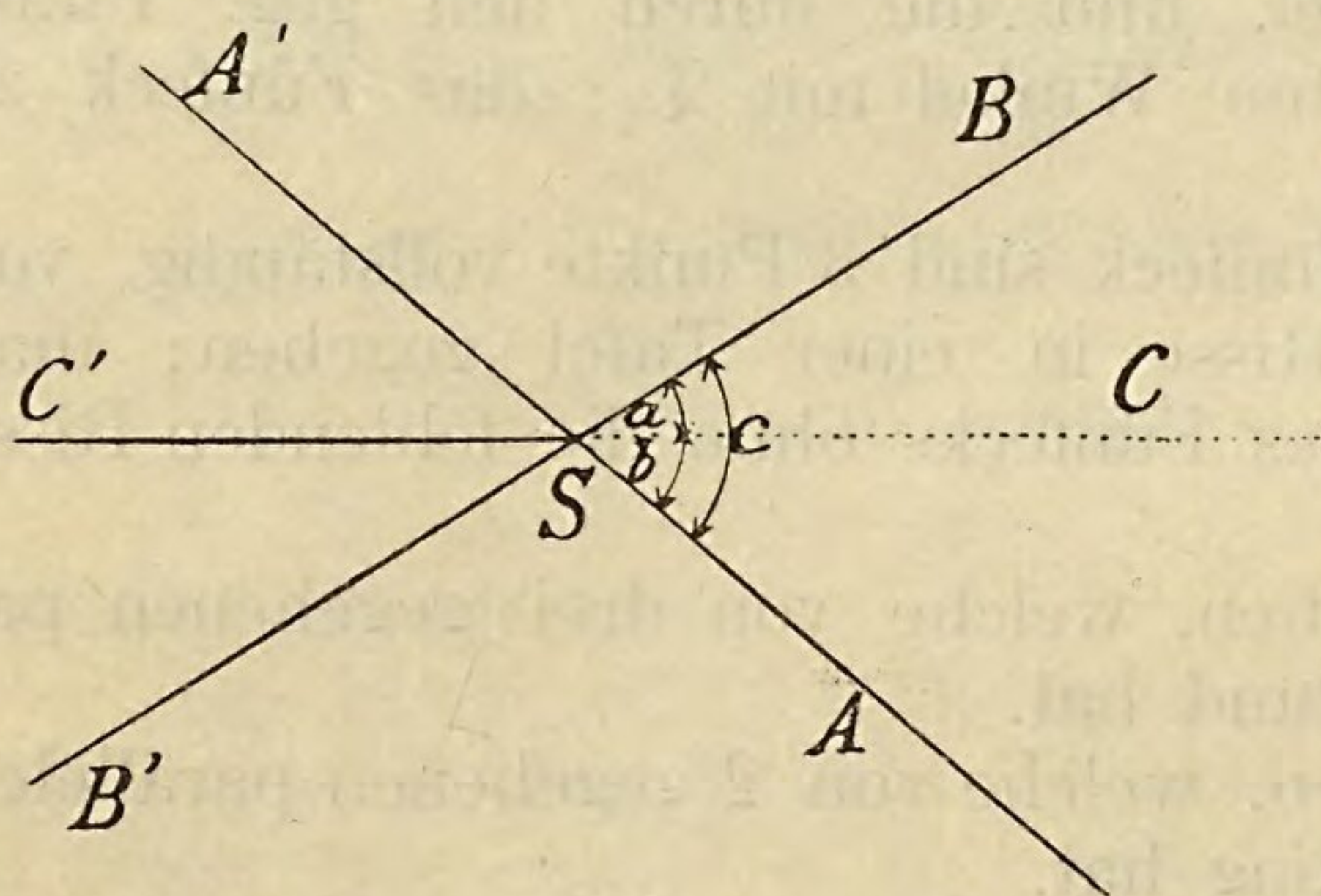


Fig. 82.

hinwieder einen Teil des Raumes, allerdings unvollständig, abgrenzen. Das so entstehende räumliche Gebilde nennt man dreiseitige körperliche Ecke oder ein Dreikant. Der gemeinsame Punkt S (Fig. 82) ist der Scheitel, die Geraden SA , SB , SC sind die Kanten, die Ebenen SAB , SAC , SBC die Seitenebenen des Dreikants. Die letzteren bilden in S die Linienwinkel $BSC = a$, $ASC = b$, $ASB = c$, welche wir kurz als die Seiten des Dreikants bezeichnen; von ihnen sind zu unterscheiden die gegenseitigen Neigungswinkel der Seitenebenen oder die Flächenwinkel $(SA) = \alpha$, $(SB) = \beta$, $(SC) = \gamma$, welche wir die Winkel des Dreikants nennen wollen.

Die über den Scheitel hinaus verlängerten Kanten bilden zunächst ein neues Dreikant $SA'B'C'$, dessen Seiten und Winkel, weil von denselben Geraden und denselben Ebenen gebildet, denen des Hauptdreikants gleich sind; man nennt es Scheiteldreikant.

Hat man nur eine Kante, etwa SC , über den Scheitel hinaus verlängert, so bildet die Verlängerung SC' mit SA u. SB ein Dreikant $SABC'$, welches mit dem ursprünglichen die Seite ASB und die Neigung der Ebenen ASC (C') u. BSC (C') d. h. den Winkel (SC) oder (SC') gleich hat, während die übrigen Seiten und Winkel als Nebenwinkel die ursprünglichen zu 180° ergänzen. Man nennt ein solches Dreikant ein Nebendreikant des ursprünglichen. Es gibt deren drei: $SABC'$, $SAB'C$, $SA'BC$. Nebendreikante haben daher mit dem Hauptdreikante eine Seite und den Gegenwinkel gleich, die übrigen Seiten u. Winkel ergänzen sich zu je 180° .

Zwei verlängerte Kanten bilden mit der dritten unverlängerten wieder neue Dreikante: $SA'B'C$, $SA'BC'$, $SAB'C'$, welche die Nebendreikante des Scheiteldreikants sind und Nebenscheiteldreikante heißen.

Durch drei unbegrenzte sich in einem Punkte schneidenden Ebenen wird also der ganze Raum in acht dreiseitige Ecken geteilt, deren eine die übrigen sieben mitbestimmt.

§ 66. Mit einem Dreikant wird übrigens noch ein weiteres Dreikant in Verbindung gebracht, das Polar- oder Supplementardreikant, welches dadurch entsteht, dass man von einem beliebigen Punkte S' (Fig. 83) auf seine drei Seitenebenen die Senkrechten $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ fällt. Wie aus der Figur unschwer zu ersehen ist, ergänzen die Winkel $BA'C$, $CB'A$, $AC'B$ oder die Flächenwinkel ($S'A'$), ($S'B'$), ($S'C'$) des Polar- dreikants die Seiten a , b , c des Hauptdreikants zu je 180° . Umgekehrt stehen die Kanten SA , SB , SC des Hauptdreikants auch auf den Ebenen des Polardreikants senkrecht und es kann somit jedes der Dreikante als das Polardreikant des andern gelten. Daher: Die Seiten und Winkel eines Dreikants ergänzen beziehungsweise die Winkel und Seiten des Polardreikants zu je 180° .

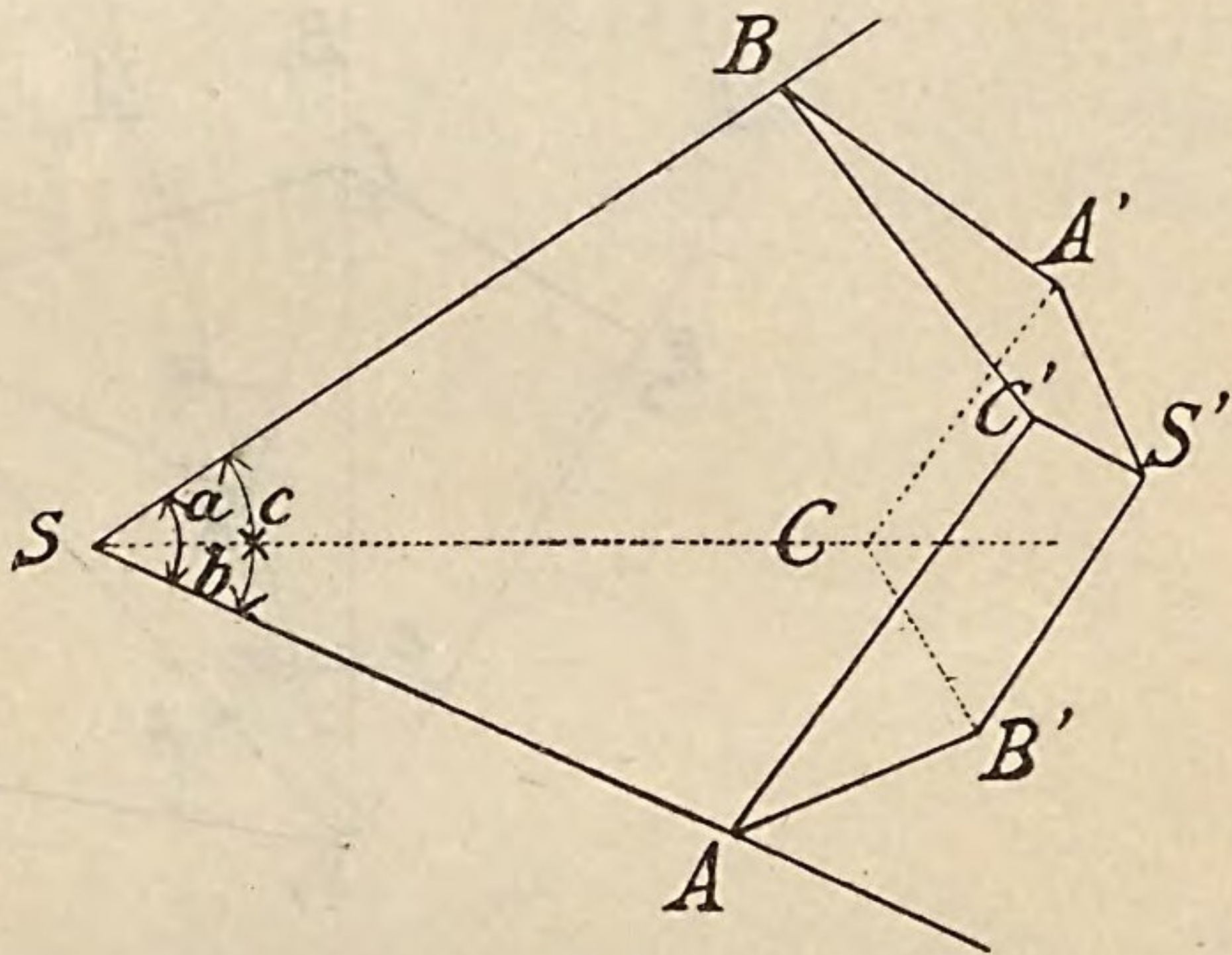


Fig. 83.

§ 67. Über die Beziehungen zwischen den Stücken eines Dreikants stellt die Stereometrie die nachfolgenden Sätze auf, welche zumeist den Sätzen über das ebene Dreieck entsprechen:

- 1) Die Summe aller Seiten eines Dreikants ist kleiner als 360° .

2) Die Summe zweier Seiten ist stets grösser, ihre Differenz kleiner, als die dritte.

3) Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel, einer grösseren Seite auch der grössere Winkel gegenüber.

4) Die Summe der Winkel eines Dreikants ist stets grösser als 180° , aber kleiner als 540° .

5) Die Summe zweier Winkel eines Dreikants ist mit der Summe der zwei gegenüberliegenden Seiten gleichartig, d. h. gleichzeitig grösser oder kleiner als 180° oder gleichzeitig gleich 180° .

6) Die Summe zweier Winkel eines Dreikants ist immer kleiner als der um 180° vermehrte dritte.

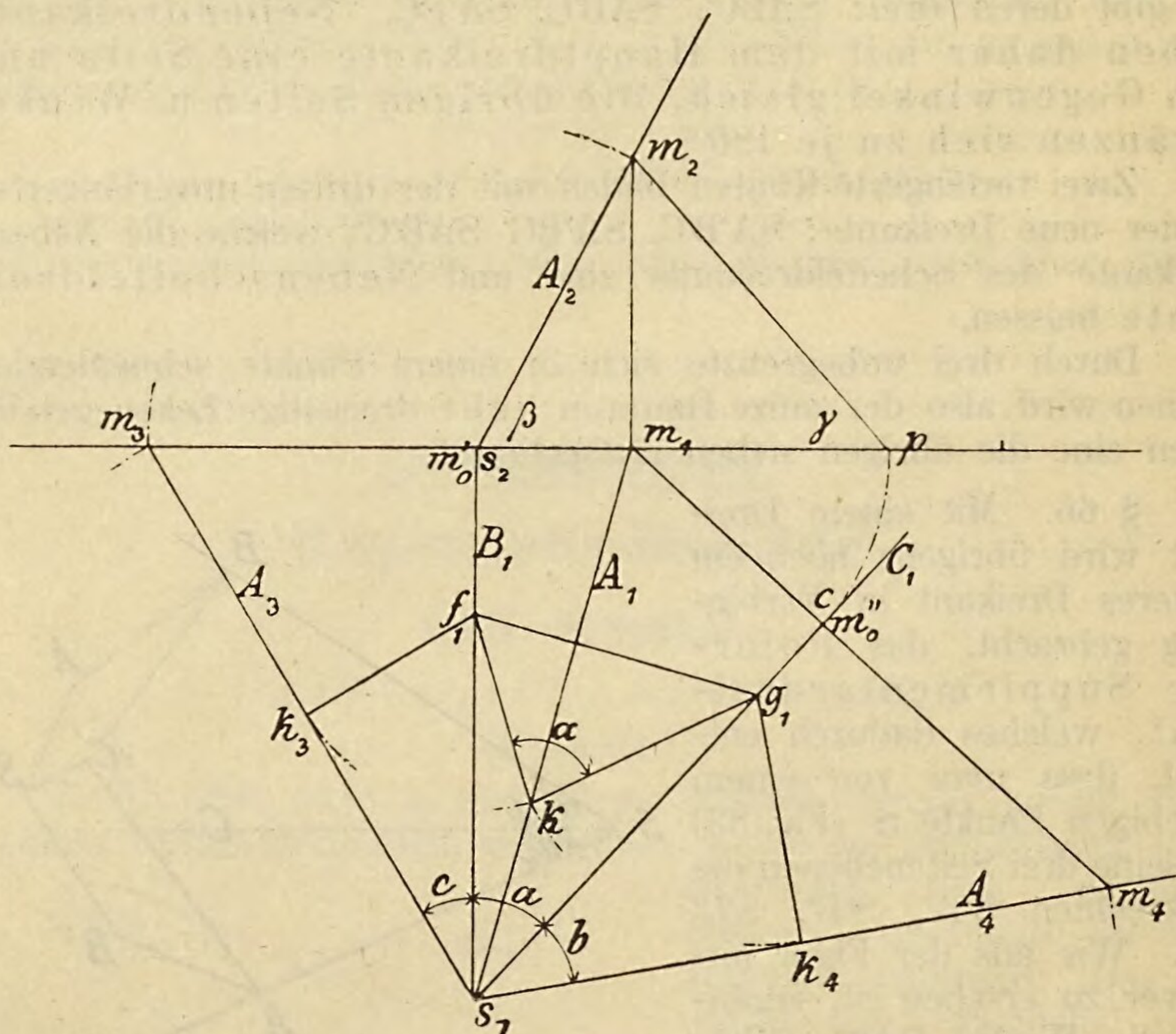


Fig. 84.

§ 68. Ein Dreikant ist durch drei seiner Stücke bestimmt, d. h. man kann aus drei gegebenen Stücken die fehlenden drei finden. Dies führt zu folgenden 6 Aufgaben: Ein Dreikant zu konstruieren aus 1) drei Seiten, 2) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, 3) zwei Seiten und einem Gegenwinkel, 4) einer Seite und den anliegenden Winkeln, 5) einer Seite, einem anliegenden und dem Gegenwinkel, 6) drei Winkeln.

Diese Aufgaben werden wir dadurch lösen, dass wir aus den gegebenen Stücken erst die Risse des Dreikants in dem rechtwinkligen System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ gewinnen, worauf sich dann mit leichter Mühe die fehlenden Stücke in wirklicher Grösse ergeben werden, falls man dieselben nicht schon während des Aufsuchens der Risse gefunden

haben sollte. Um die Ausführung einfacher zu gestalten, denken wir das zu projizierende Dreikant in seiner ganzen Ausdehnung, aber begrenzt durch die zweite Tafel, in den ersten Quadranten des Tafelsystems gestellt, lassen ferner eine seiner Seiten mit $\mathfrak{T}_1$ zusammenfallen, und nehmen überdies öfter mit Vorteil einen Schenkel (Kante) dieser Seite zur Projektionsachse senkrecht.

§ 69. Aufgabe 54. Ein Dreikant aus seinen 3 Seiten a , b , c darzustellen.

Man nehme die (grösste) Seite a (Fig. 84) mit den Schenkeln B_1 u. C_1 in die $\mathfrak{T}_1$, die um B_1 u. C_1 in $\mathfrak{T}_1$ umgeklappten Seiten c u. b erscheinen als die Winkel $s_2s_1m_3$ u. $s_2s_1m_4$, die ihnen gemeinsame Kante A in doppelter Umklappung als A_3 u. A_4 , und ein beliebiger Punkt m derselben in m_3 u. m_4 ($s_1m_3 = s_1m_4$). Man betrachte nun die umgelegten Seitenebenen beziehungsweise als $\mathfrak{T}_3$ u. $\mathfrak{T}_4$ und verbinde beide mit $\mathfrak{T}_1$ zu den Systemen $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ u. $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_4$. Der erste Riss m_1 des Punktes m liegt dann im Schnitte der neuen Achsenlote m_3m_1 u. m_4m_1 , für den zweiten Riss m_2 findet sich die zweite Ordinate als Kathete der projizierenden Dreiecke $m_1m_0'm_2$ oder $m_1m_0''m_2$, welche der zweiten Ordinate gegenüber auch schon die Winkel der Systeme $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ u. $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_4$, hier die Winkel β u. γ des Dreikants enthalten. In der Verbindung von s_1 mit m_1 , sowie s_2 mit m_2 sind die Risse des Dreikants $B_1A_1C_1$ u. $B_2A_2C_2$ hergestellt.

Zur Bestimmung des noch fehlenden Winkels α lege man senkrecht zu seiner Scheitelkante A eine Ebene, deren erste Spur ($f_1g_1 \perp A_1$) die Kanten B_1 u. C_1 in f_1 u. g_1 trifft. Diese Ebene schneidet die Seitenebenen c u. b

in 2 Geraden, welche auf A senkrecht stehen und bei der Umklappung ihre senkrechte Stellung zu A_3 u. A_4 beibehalten, daher als $f_1k_3 \perp A_3$ u. $f_1k_4 \perp A_4$ gezeichnet werden können. Die drei Geraden f_1g_1 , f_1k_3 , g_1k_4 zu einem Dreieck f_1kg_1 zusammengesetzt, lassen der Linie f_1g_1 gegenüber den Winkel α erkennen.

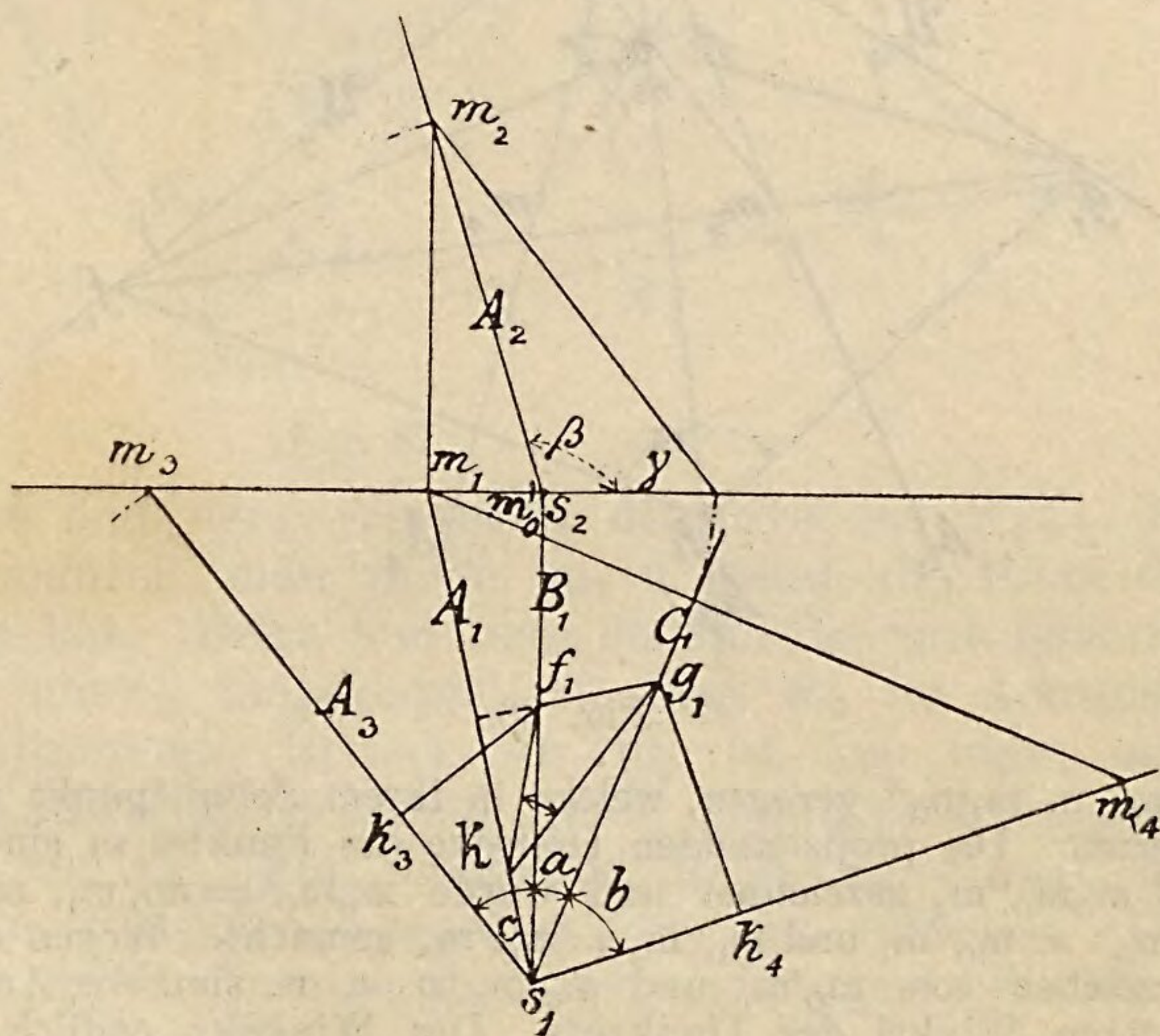


Fig. 85.

Bemerkungen: 1) Fällt der erste Riss A_1 nicht zwischen B_1 und C_1 , sondern wie in Fig. 85 zwischen B_1 und die verlängerte C_1 , so ist im pro-

jizierenden Dreiecke $m_3m_0'm_1$, die $O_1' = m_0'm_1$ des Punktes m negativ, daher nach § 39 der Nebenwinkel des $m_1m_0'm_2$ als Winkel β zu nehmen. Ebenso ergäbe sich für γ der stumpfe Aussenwinkel des projizierenden Dreiecks, wenn A_1 zwischen C_1 und die verlängerte B_1 fiel, und beide Winkel β und γ würden stumpf sein, wenn (Fig. 86) A_1 zwischen die verlängerten B_1 u. C_1 zu liegen käme. Gleicherweise lässt sich unschwer ersehen, dass für den Winkel α sein Nebenwinkel dann zu nehmen ist, wenn die Grundlinie f_1g_1 des Dreiecks f_1kg_1 einen der Schenkel B_1 oder C_1 direkt, den andern erst in der Verlängerung trifft.

2) Statt der Punkte m_3 u. m_4 kann man auf den umgelegten Geraden A_3 u. A_4 beliebige andere Punkte x_3 u. x_4 ($s_1x_3 = s_1x_4$) benützen, und aus ihnen x_1 herleiten; auch die senkrechte Stellung von s_1s_2 zur Achse ist vorteilhaft, aber nicht notwendig.

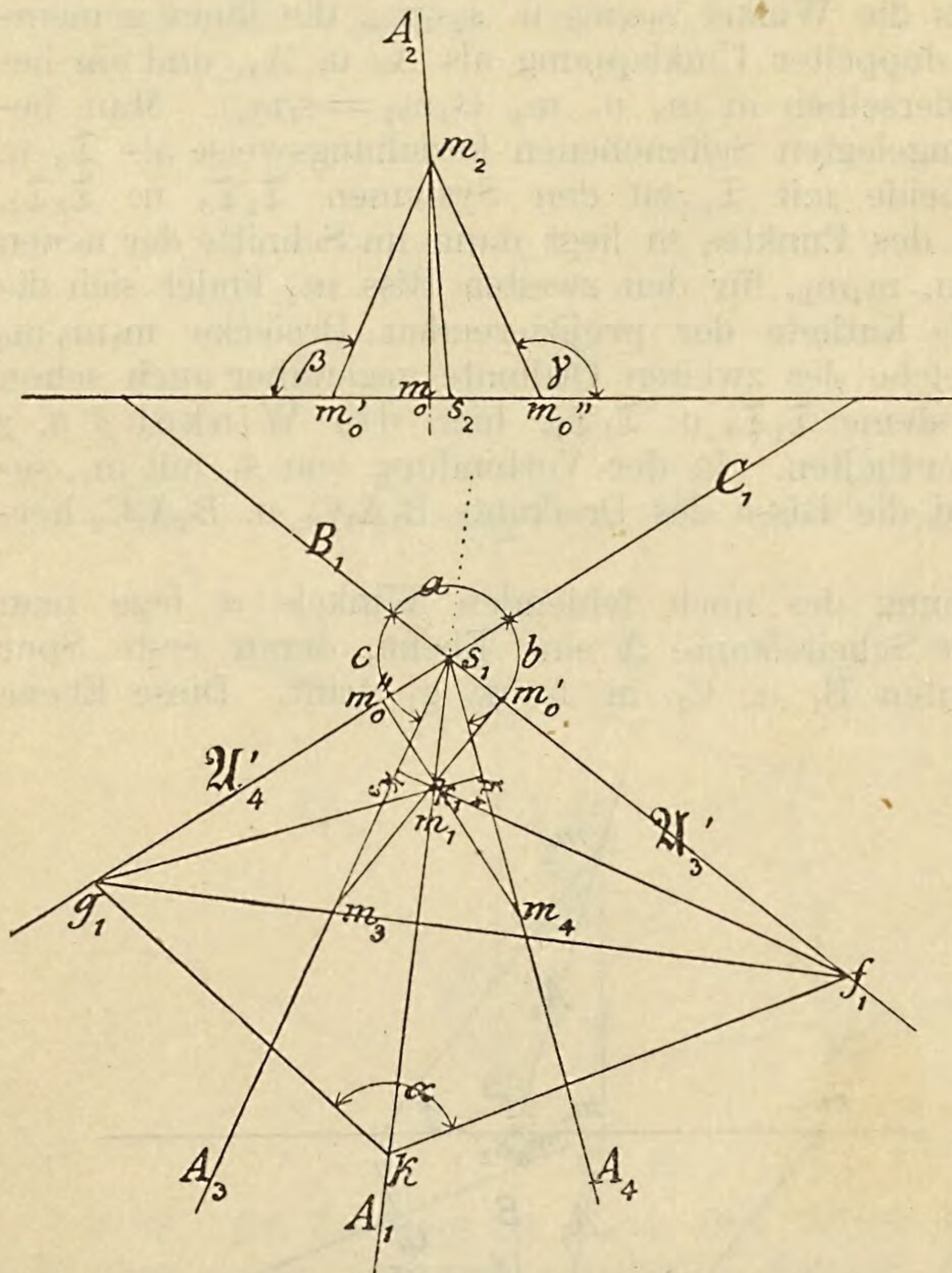


Fig. 86.

m_3m_0' u. m_4m_0'' gezogen, welche in ihrem Schnittpunkt m_1 u. in s_1m_1 die A_1 lieferten. Die projizierenden Dreiecke des Punktes m sind in $\mathfrak{T}_2$ als $m_0m_0'm_2$ und $m_0m_0''m_2$ gezeichnet und wurde $m_0m_0' = m_0'm_1$, $m_0'm_2 = m_0'm_3$, ferner $m_0m_0'' = m_0''m_1$ und $m_0''m_2 = m_0''m_4$ gemacht. Wegen der entgegengesetzten Vorzeichen von $m_0'm_1$ und $m_0'm_3$ u. s. w. sind die Aussenwinkel β u. γ die richtigen Winkel des Dreikants. Der Winkel α endlich wurde genau wie in Fig. 84 bestimmt.

5) Übrigens lässt sich bei stumpfen Seiten das Nebendreikant verwerthen. Ist nur eine Seite stumpf, so lege man diese in $\mathfrak{T}_1$ und verfähre wie oben; ist dagegen a u. b stumpf u. c spitz, so ist im Nebendreikant $a' = 180 - a$, $b' = 180 - b$, $c' = c$. Da diese Seiten spitz sind, so findet man ohne Anstand

3) Als Probe für richtige Zeichnung beachte man, dass $s_1k_3 = s_1k_4$, ferner dass k in A_1 liegen muss.

4) Falls eine oder mehrere Seiten stumpf gegeben sind, hat man bei der Konstruktion der projizierenden Dreiecke wieder die Vorzeichen der Ordinaten (Bem.1) zu berücksichtigen. Der Übung wegen ist in Fig. 86 der Fall der drei stumpfen Seiten a , b , c behandelt.

Seite a ist in $\mathfrak{T}_1$ gelegt, b u. c sind um B_1 und C_1 umgeklappt. In A_3 und A_4 (oder auch in deren Verlängerungen) ist $s_1m_3 = s_1m_4$ genommen, dann wurden die Achsenlote

die Winkel α' , β' , γ' des Nebendreikants und ist schliesslich $\alpha = 180 - \alpha'$, $\beta = 180 - \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Sind alle 3 Seiten stumpf, so ist im Nebendreikant nur eine stumpf und die beiden andern spitz, dasselbe daher ebenfalls leicht zu konstruieren.

6) Wenn die drei Seiten eines Dreikants, wie in den Fig. 84, 85, 86 in eine Ebene ($\mathfrak{T}_1$) ausgebreitet sind, so nennt man die so entstandene Figur das Netz des Dreikants.

§ 70. Aufgabe 55. Ein Dreikant aus zwei Seiten (a u. c) und dem eingeschlossenen Winkel (β) zu konstruieren.

Man lege wieder (Fig. 87) die Seite a in $\mathfrak{T}_1$, und klappe c um B_1 als $\mathfrak{T}_3$ um. In A_3 nehme man m_3 beliebig, konstruiere aus

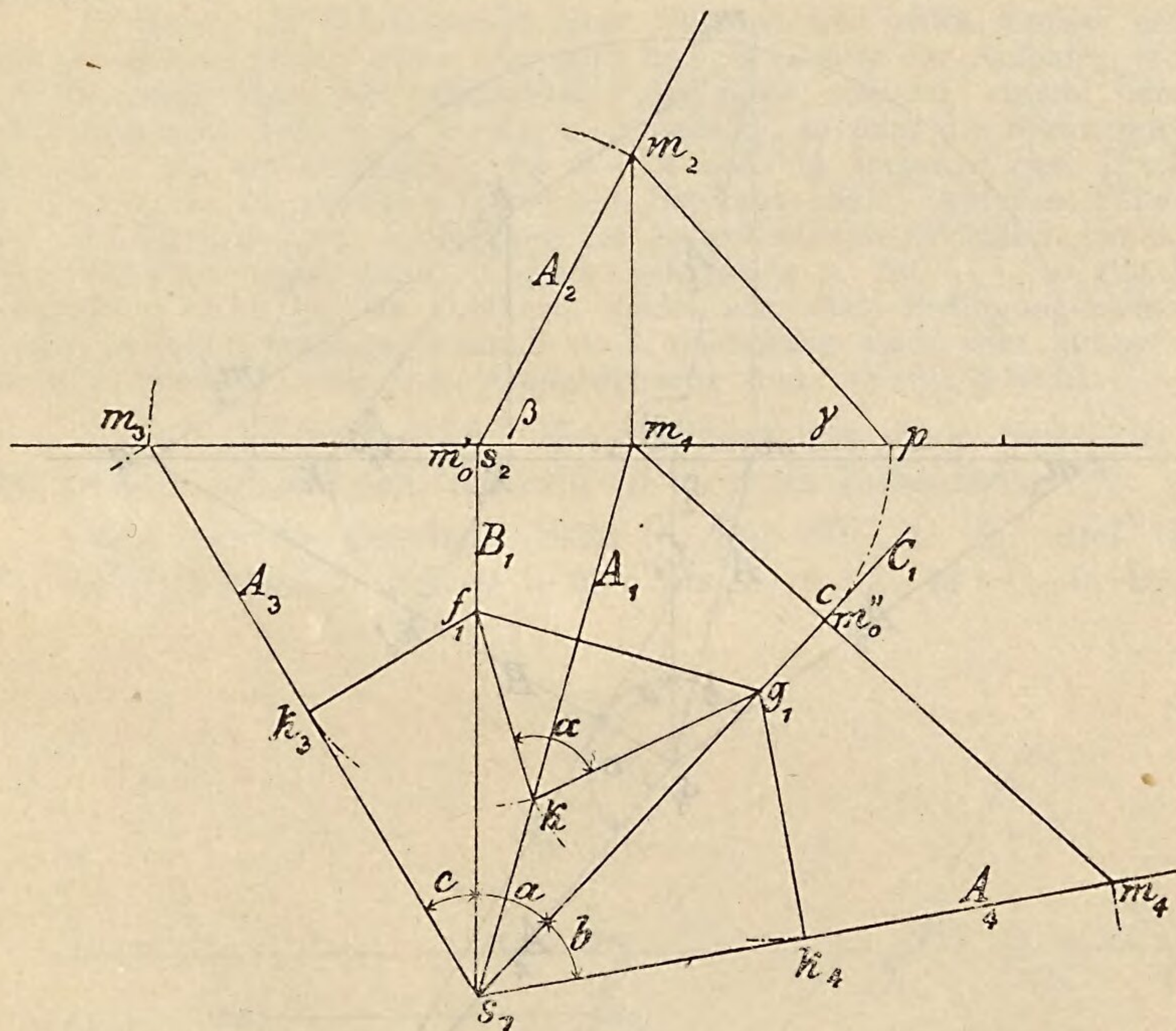


Fig. 87.

m_3s_2 als Hypotenuse und dem Winkel β des Systems $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ das Dreieck $s_2m_2m_1$, wodurch man m_2 u. m_1 u. damit die Risse des Dreikants gewonnen hat. Betrachtet man sodann die noch fehlende Seite b als $\mathfrak{T}_4$ und um C_1 umgeklappt, so liegt m_4 im Achsenlot m_1m_0'' und das projizierende Dreieck für m_4 ist aus m_1m_2 und $m_1m_0'' = m_1p$ als Kathete zu zeichnen, seine Hypotenuse m_2p ist die vierte Ordinate von m. Man mache daher $m_0''m_4 = m_2p$, um in $m_0''s_1m_4$ die Seite b (Kontrolle $s_1m_4 = s_1m_3$) zu erhalten. Der Winkel γ ist bereits im Dreieck m_1pm_2 vorhanden und Winkel α wird wie in Aufgabe 54 gefunden.

Bemerkungen: 1) Ist der Winkel β stumpf gegeben, so muss das projizierende Dreieck $s_2m_2m_1$ mit dem spitzen Nebenwinkel gezeichnet werden, gleichzeitig wird die Ordinate s_2m_1 negativ und m_1 kommt zwischen m_3 u. s_2 , in die negative $\mathfrak{T}_1$ des Systems $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ zu liegen.

2) Bei stumpfen Seiten kann man wieder zu dem Nebendreikant greifen.

ist die Verbindungslinie k_2q und ihr Schnitt mit dem oben erwähnten Kreis gibt m_2 . Dadurch ist auch A_2 u. A_1 bestimmt und sind mit ihnen die Risse des Dreikants fertig gestellt, aus welchen die noch fehlenden Stücke c , γ , α nach Aufgabe 54 zu erhalten sind.

Bemerkungen: 1) Für stumpfe b muss der Halbkreis aus s_2 in der negativen $\mathfrak{T}_2$ beschrieben werden, da die Kante A die $\mathfrak{T}_2$ nur unterhalb der $\mathfrak{T}_1$ treffen kann. Bei stumpfem β hat man in dem zugehörigen Dreiecke den Nebenwinkel zu benützen, wodurch die zweite Ordinate des Punktes k negativ wird.

2) Auch hier wird man bei stumpfen Stücken sich des Nebendreikants bedienen.

3) Da m_2 als Schnittpunkt einer Geraden und eines Kreises erhalten wird, so gibt es zwei, eine oder gar keine Lösung der Aufgabe, je nachdem die zweite Spur der Seitenebene c den Kreis zweimal, einmal oder gar nicht schneidet. Sind a u. b spitz u. β beliebig, so zeigt die Figur, dass man für $b > a$ nur ein Dreikant,*) für $b < a$ und ein spitzes β zwei Dreikante, für $b < a$ und ein stumpfes β gar kein Dreikant erhält. Auf diese Fälle kann man alle übrigen durch Einführung der Nebendreikante zurückbringen, so dass man allgemein sagen kann: Liegt b zwischen a u. $180 - a$, so gibt es für beliebige β immer nur ein Dreikant; findet aber diese Bedingung nicht statt, so gibt es zwei Dreikante, wenn b u. β gleichzeitig spitz oder stumpf sind, gar kein Dreikant, wenn b u. β ungleichartig sind. (Vergl. § 66,5.)

§ 72. Aufgabe 57. Ein Dreikant aus einer Seite (a) und den beiden anliegenden Winkeln (β u. γ) zu konstruieren.

Man lege die gegebene Seite (a , Fig. 89) in $\mathfrak{T}_1$, und denke die beiden fehlenden Seiten b u. c als $\mathfrak{T}_3$ u. $\mathfrak{T}_4$ um C_1 u. B_1 um-

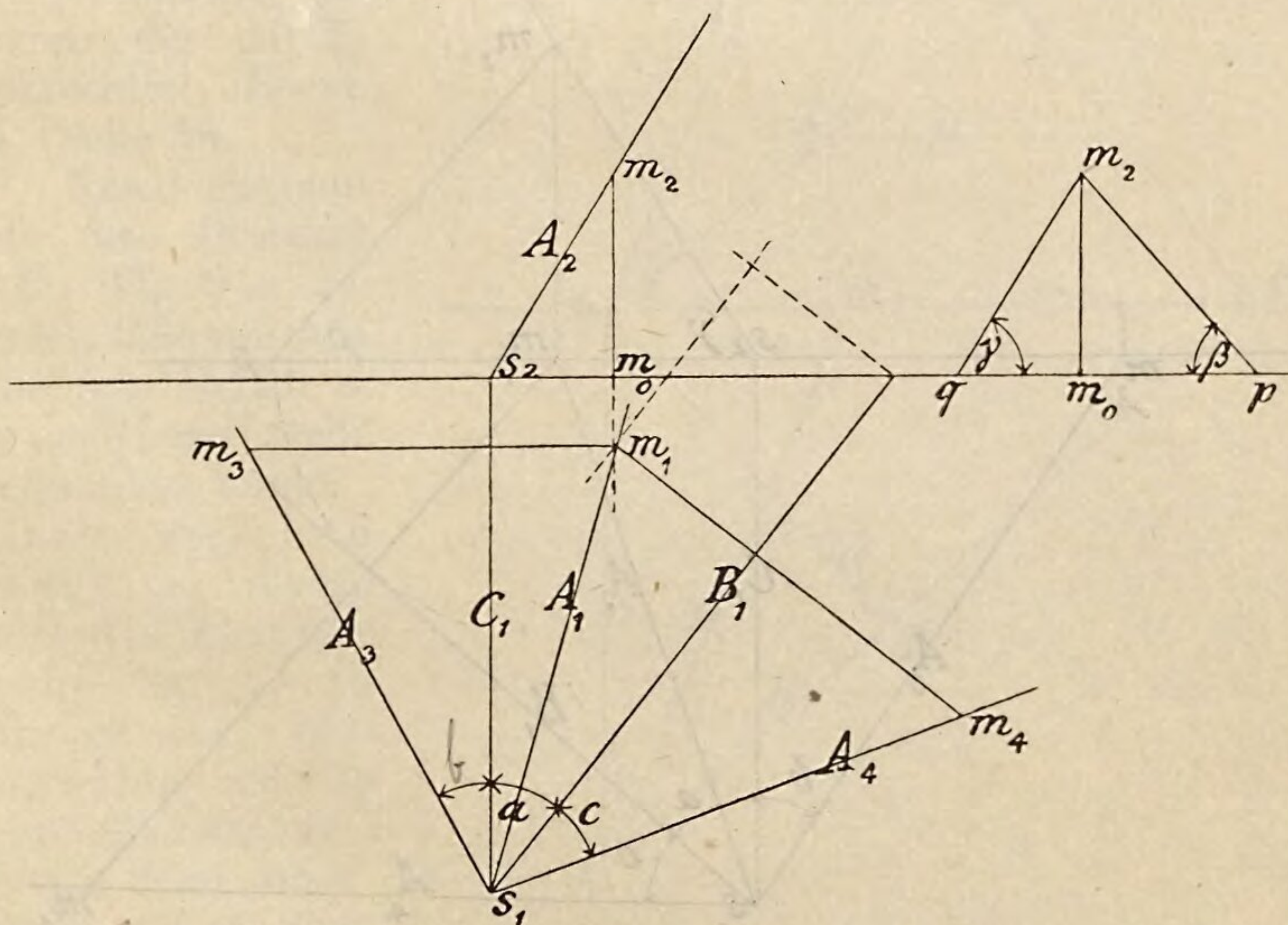


Fig. 89.

geklappt, und mit $\mathfrak{T}_1$ zu den Systemen $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ u. $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_4$ verbunden. Ein beliebiger Punkt m der noch fehlenden Raumkante A liefert in beiden Systemen projizierende Dreiecke mit gemeinsamer Kathete,

*) q kommt dann innerhalb des Kreises aus s_2 zu liegen.

nämlich dem Abstand des Punktes m von $\mathfrak{T}_1$, welcher die Winkel γ u. β gegenüber liegen. Wegen der beliebigen Lage von m kann auch sein Abstand von $\mathfrak{T}_1$ oder die Ordinate m_0m_2 willkürlich gewählt und die Dreiecke qm_2m_0 u. m_2m_0p können konstruiert werden. Jedes derselben enthält in der zweiten Kathete m_0q u. m_0p die Abstände des ersten Risses m_1 von den jeweiligen Achsen $\mathfrak{A}_{13}$ u. $\mathfrak{A}_{14}$ oder den Geraden C_1 u. B_1 . Zieht man daher in diesen Entfernungen Parallele zu C_1 u. B_1 , so schneiden sich diese in m_1 , senkrecht darüber im Abstände m_0m_2 von der Achse $\mathfrak{A}_{12}$ liegt m_2 , und sind damit die Risse des Dreikants hergestellt, worauf sich die fehlenden Stücke leicht nachbringen lassen.

Bemerkungen: 1) Bei stumpfen β u. γ beachte man, dass in den mit $180^\circ - \beta$ u. $180^\circ - \gamma$ konstruierten Dreiecken qm_0m_2 u. pm_0m_2 die Abstände m_0q u. m_0p negativ werden und in Folge dessen die Parallelen in der negativen $\mathfrak{T}_1$ der Systeme $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ u. $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_4$ zu ziehen sind.

2) Im Polardreikant sind die Stücke $\alpha' = 180^\circ - a$, $b' = 180^\circ - \beta$, $c' = 180^\circ - \gamma$ bekannt; seine noch fehlenden Stücke werden nach Aufgabe 55 gefunden, aus ihnen ist schliesslich $\alpha = 180^\circ - \alpha'$, $b = 180^\circ - \beta'$, $c = 180^\circ - \gamma'$.

§ 73. Aufgabe 58. Ein Dreikant aus einer Seite (b), einem anliegenden Winkel (γ) und dem Gegenwinkel (β) herzustellen.

Man lasse hier die noch unbekannte Seite a mit $\mathfrak{T}_1$ zusammenfallen, stelle den einen ihrer Schenkel C_1 (Fig. 90) senkrecht zur

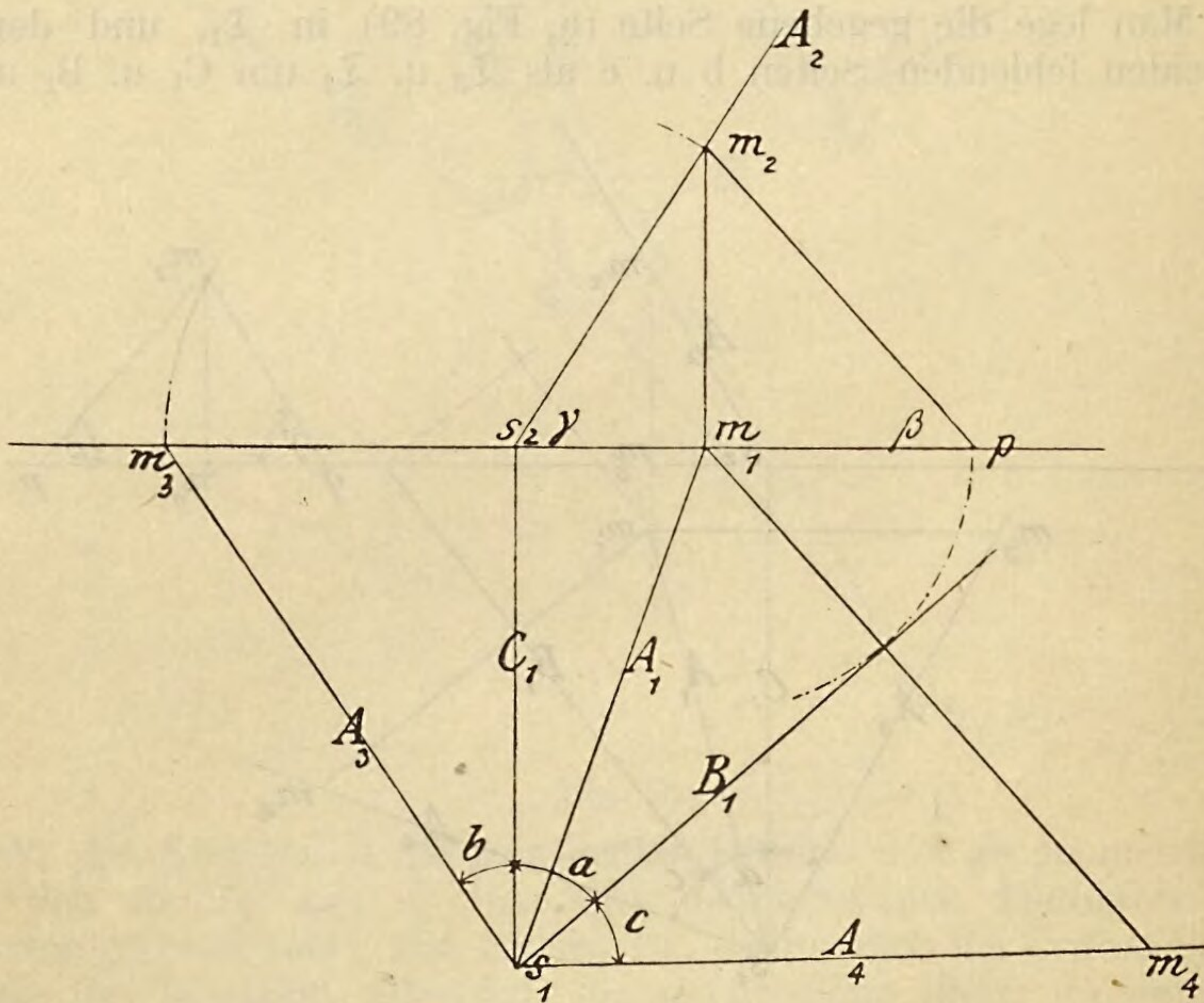


Fig. 90.

Achse, klappe die gegebene Seite b als $\mathfrak{T}_3$ um, nehme in A_3 den Punkt m_3 und konstruiere aus m_3s_2 als Hypotenuse und dem Winkel γ das rechtwinklige Dreieck $s_2m_1m_2$, wodurch m_2 u. m_1 und die Risse der dritten Raumkante A gefunden sind. Nun kann man aus m_1m_2 und dem Gegenwinkel β das Dreieck m_1m_2p zeichnen, und

findet in m_1p den Abstand des Punktes m_1 von der noch fehlenden Kante B_1 ($\mathfrak{U}_{14}$); dieselbe ist daher Tangente durch s_1 an den mit m_1p aus m_1 beschriebenen Kreis. Mit ihr ist die Seite a bekannt und kann schliesslich auf mehrfache Art die Seite c konstruiert werden.

Bemerkungen: 1) In unserer Figur, in welcher Winkel β kleiner ist als der spitze Winkel γ , gibt es noch ein zweites Dreikant, weil von s_1 aus an den Kreis noch eine zweite Tangente möglich ist. Wäre dagegen $\beta > \gamma$, so wäre diese Tangente unbrauchbar, weil das neue Dreikant nicht mehr den Winkel β , sondern seinen Nebenwinkel enthielte.

2) Auch dieser Fall lässt sich mit Hilfe des Polardreikants auf Aufgabe 56 zurückführen. Im Polardreikant sind nämlich zwei Seiten und ein Gegenwinkel bekannt und die in Aufgabe 56 aufgeführten Bedingungen für die Möglichkeit von zwei, einem oder keinem Dreikant gelten auch für Aufgabe 58, wenn man Winkel anstatt Seite und umgekehrt setzt.

§ 74. Aufgabe 59. Ein Dreikant aus seinen 3 Winkeln zu zeichnen.

Man lege wieder (Fig. 91) die unbekannte Seite a in $\mathfrak{T}_1$, so zwar, dass ein Winkelschenkel C_1 senkrecht zur Achse zu stehen kommt, dann erscheint der Winkel γ in wirklicher Grösse in $\mathfrak{T}_2$, und sind C_1 und A_2 die Spuren der zu $\mathfrak{T}_2$ senkrechten Ebene CA (Seite b).

Nundenke man sich das Dreikant $SABC$ (Fig. 91a) gefunden, fälle von dem beliebigen Punkte s_2 der nach Lage bereits

bekannten Kante, durch welchen Punkt s_2 dann auch die $\mathfrak{T}_2$ senkrecht zu C zu führen ist, eine Senkrechte auf die gegenüberliegende

Ebene BSA oder Seite c , welche diese Ebene im Punkte

d treffen mag. Von d aus ziehe man $df \perp A$, $dg \perp B$, und verbinde f u. g mit s_2 , dann sind $s_2fd = \alpha$ u. $s_2gd = \beta$ die noch fehlenden Flächenwinkel. Die Lote aus d auf die Dreiecksseiten s_2f u. s_2g , nämlich dm u. dn geben die Entfernungen des Punktes d von den

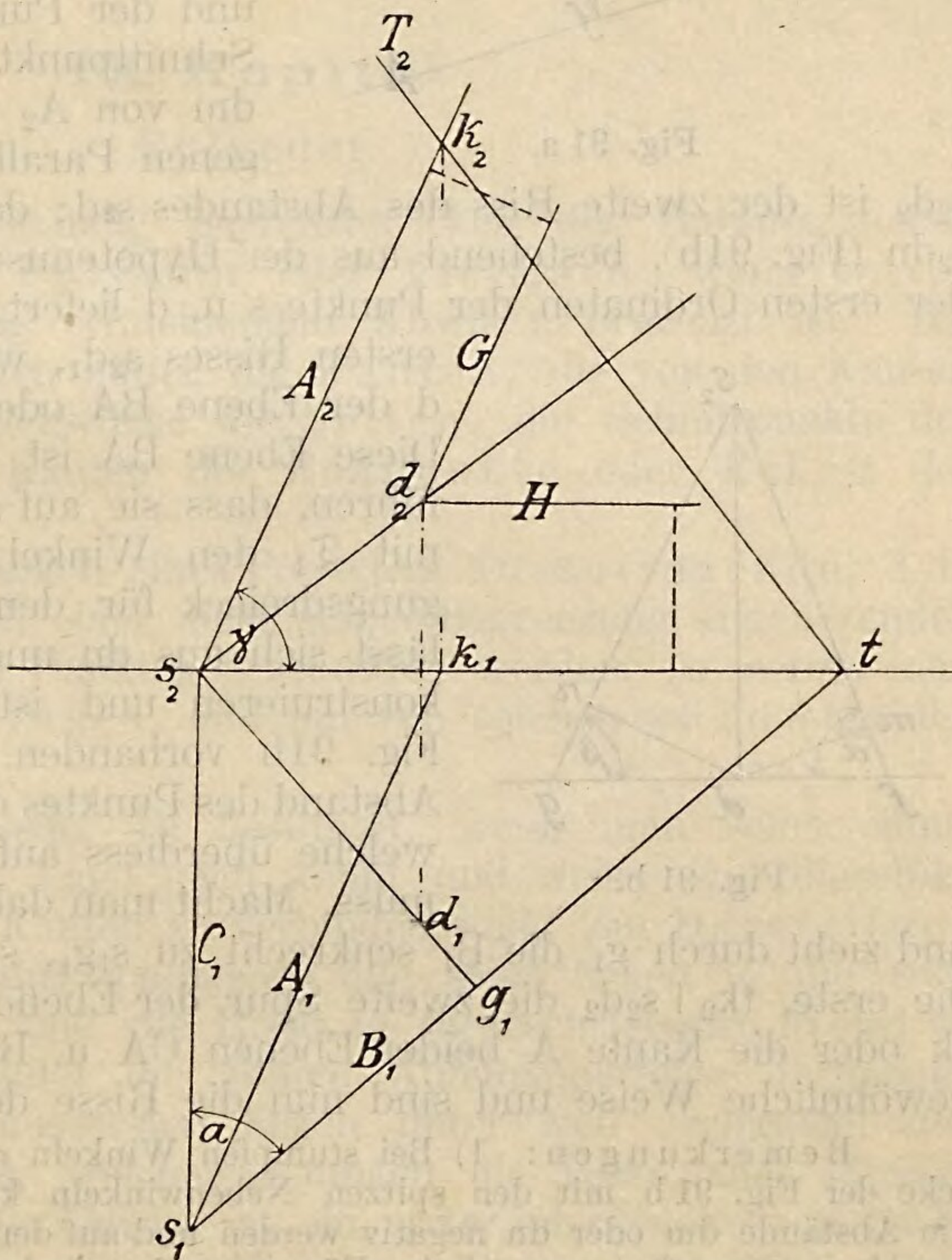


Fig. 91.

Ebenen CSA u. CSB an, sie müssen zur Festlegung des Punktes d in der Aufgabe dienen.

Wegen der beliebigen Lage des Punktes s_2 in C ist die Entfernung s_2d willkürlich. Man mache

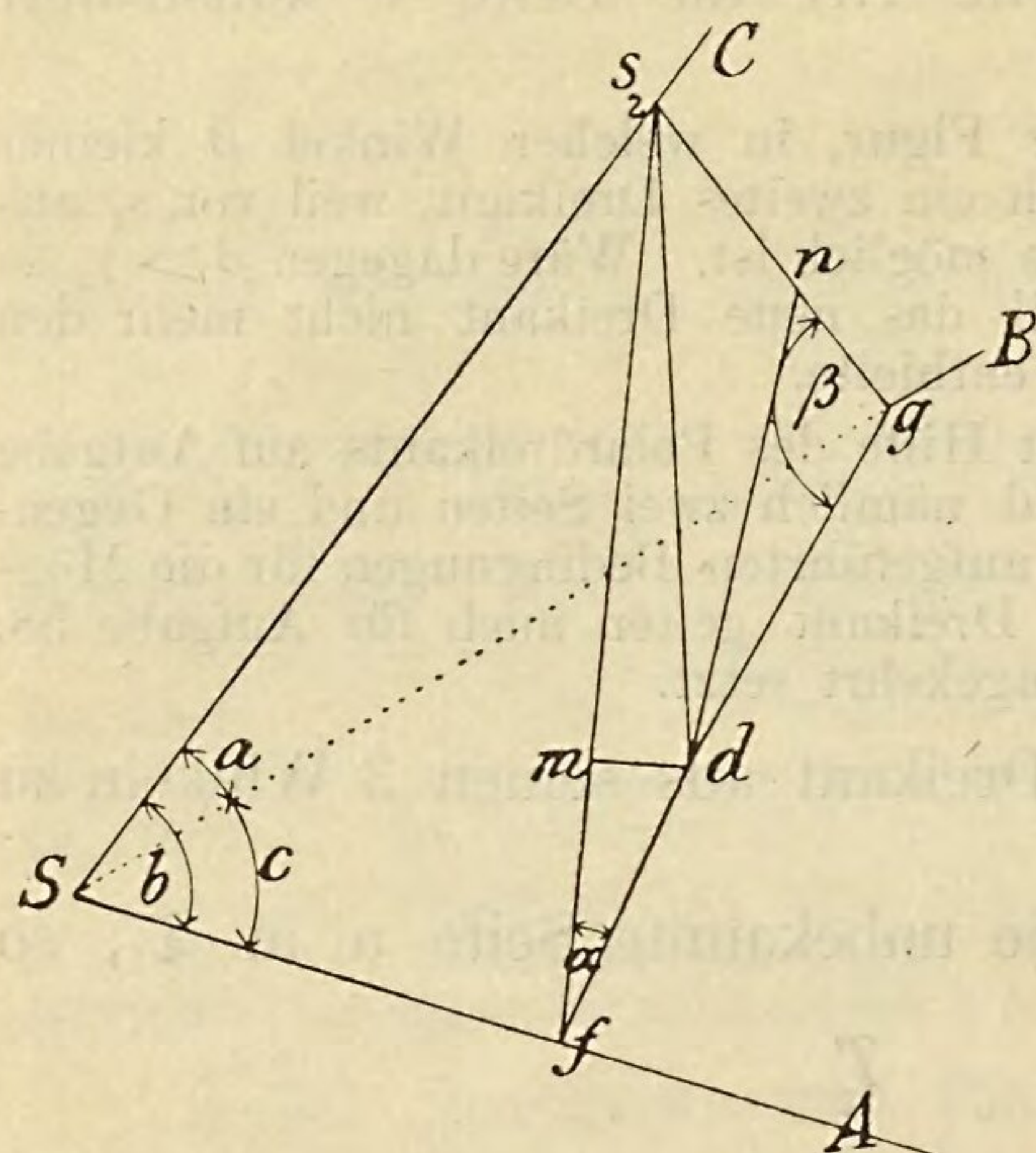


Fig. 91 a.

daher (Fig. 91b) den Winkel $s_2fd = \alpha$, fälle die beliebige Senkrechte s_2d und zeichne ein zweites rechtwinkliges Dreieck, welches s_2d gegenüber den Winkel β fasst. Die Strecken $dm \perp s_2f$ u. $dn \perp s_2g$ sind sodann die Abstände des Punktes d von den Ebenen CA u. CB. Ebene CA ist die bereits gefundene zweite Lotebene C_1A_2 , Ebene CB oder Seite a fällt mit $\mathfrak{T}_1$ zusammen, daher projiziert sich sowohl dm als dn in $\mathfrak{T}_2$ in wirklicher Grösse und der Punkt d_2 ergibt sich als Schnittpunkt der in der Entfernung dm von A_2 und dn von $\mathfrak{A}$ gezogenen Parallelen G u. H (Fig. 91).

s_2d_2 ist der zweite Riss des Abstandes s_2d ; das erste Längendreieck s_2dn (Fig. 91b), bestehend aus der Hypotenuse s_2d und der Differenz der ersten Ordinaten der Punkte s u. d liefert in s_2n die Länge des

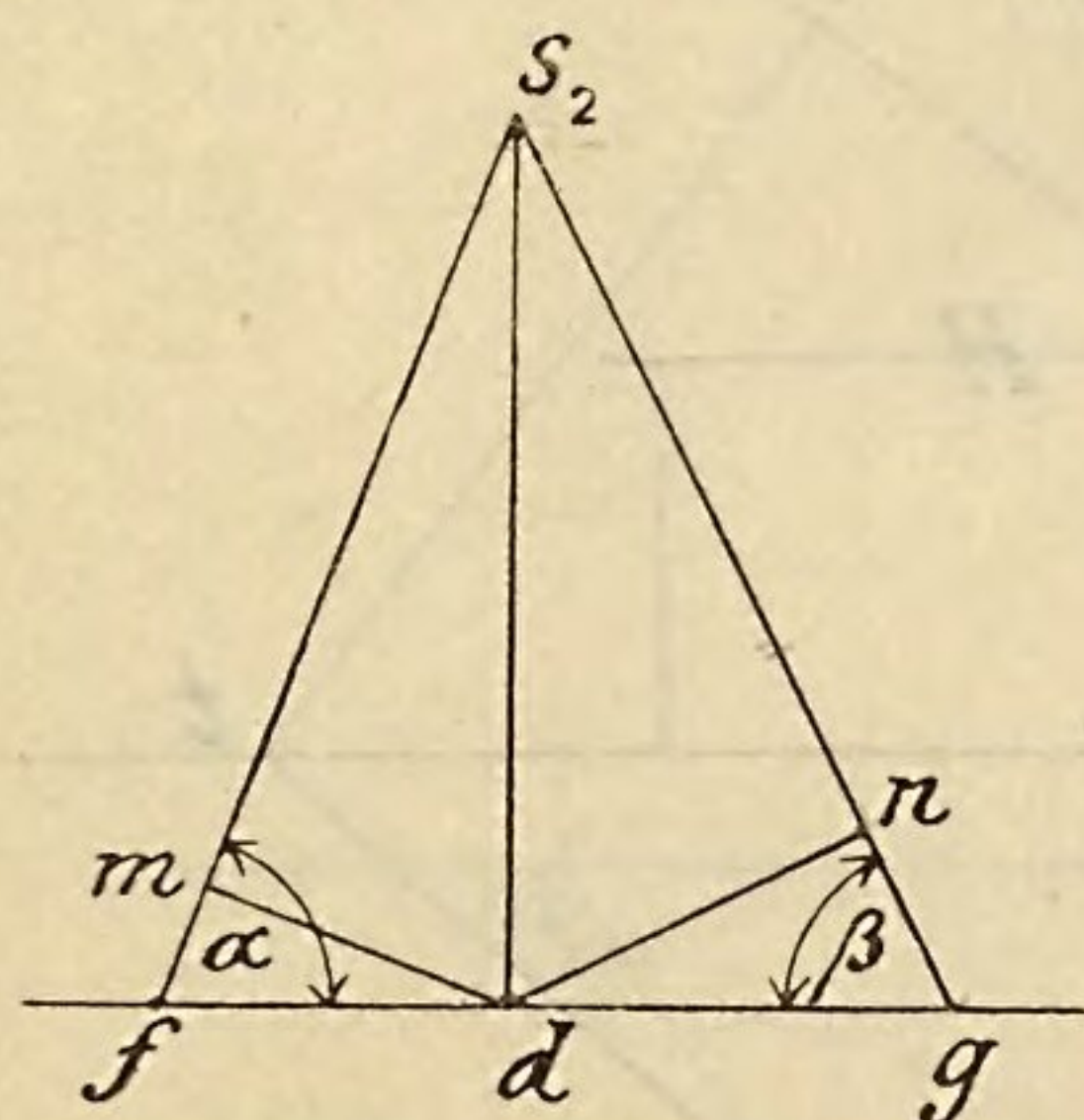


Fig. 91 b.

ersten Risses s_2d_1 , wodurch nun der Punkt d der Ebene BA oder Seite c festgelegt ist. Diese Ebene BA ist durch Punkt d so zu führen, dass sie auf sd senkrecht steht und mit $\mathfrak{T}_1$ den Winkel β bildet. Das Neigungsdreieck für den Punkt d der Ebene lässt sich aus dn und dem Gegenwinkel β konstruieren und ist bereits in dng der Fig. 91b vorhanden. Kathete ng ist der Abstand des Punktes d_1 von der Ebenenspur, welche überdiess auf s_1d_1 senkrecht stehen muss. Macht man daher (Fig. 91) $d_1g_1 = ng$

und zieht durch g_1 die B_1 senkrecht zu s_1g_1 , so ist diese Gerade B_1 die erste, $tk_2 \perp s_2d_2$ die zweite Spur der Ebene BA. Die Schnittlinie sk oder die Kante A beider Ebenen CA u. BA ergibt sich dann auf gewöhnliche Weise und sind nun die Risse des Dreikants gefunden.

Bemerkungen: 1) Bei stumpfen Winkeln α oder β werden die Dreiecke der Fig. 91 b mit den spitzen Nebenwinkeln konstruiert, wodurch dann die Abstände dm oder dn negativ werden und auf den entgegengesetzten Seiten von A_2 u. $\mathfrak{A}$ aufzutragen sind. Für stumpfe γ ändert sich die Konstruktion in keiner Weise, nur kommt A_1 links von C_1 zu liegen.

2) Durch Einführung des Polardreikants kann dieser Fall auf Aufgabe 54 zurückgeführt werden.

§ 75. Übungsaufgaben: 1) Ein gleichschenkliges Dreikant (mit zwei gleichen Seiten) aus der Basis a und dem Winkel α an der Spitze zu konstruieren.

Eine Ebene durch die Kante A senkrecht zur Seite a zerlegt das Dreikant in zwei kongruente rechtwinklige Dreikante, von welchen eine Seite $\left(\frac{a}{2}\right)$, der Gegenwinkel $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und der anliegende Winkel (90°) bekannt sind.

2) Ein Dreikant aus zwei Seiten und der zur dritten Seite gehörigen Höhe zu konstruieren. Unter Höhe oder Höhenwinkel ist jener (spitze) Winkel zu verstehen, welchen eine Kante mit der gegenüberliegenden Seitenebene bildet.

3) Ein Dreikant aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und der Summe der beiden andern Seiten herzustellen.

4) Ein Dreikant aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und der Differenz der beiden andern Seiten zu konstruieren.

5) Ein Dreikant aus einer Seite, dem gegenüberliegenden Winkel und der Summe (Differenz) der beiden anderen Seiten herzustellen.

6) Durch den Scheitel eines allgemein gegebenen Winkels eine Gerade so zu ziehen, dass sie mit den Schenkeln gegebene Winkel bildet.

7) Die gemeinsame Schnittlinie derjenigen Ebenen zu ermitteln, welche die drei Winkel eines gegebenen Dreikants halbieren. — Welche Eigenschaft kommt dieser Schnittlinie zu?

8) In einer gegebenen Ebene denjenigen Punkt zu finden, welcher von den 3 Seitenebenen eines gegebenen Dreikants gleiche Entfernungen besitzt.

IX. Kapitel.

Polyeder.

§ 76. Ein vollständig begrenzter Teil des Raumes heisst Körper, und zwar Polyeder oder Vielflach, wenn er von lauter sich gegenseitig schneidenden Ebenen begrenzt ist. Die Schnittlinien der Ebenen bilden die Kanten, die von den Kanten eingeschlossenen Ebenenstücke die Seiten, die Schnittpunkte der zusammenstossenden Kanten die Eckpunkte oder Ecken des Polyeders.

Sind sämtliche Ecken eines Polyeders ausspringende, d. h. kann ein Polyeder von einer nicht seiner Begrenzung angehörenden Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden, so nennt man das Polyeder ein konvexes, und nur von solchen soll im folgenden die Rede sein.

§ 77. Ein Polyeder ist bestimmt, wenn man seine sämtlichen Eckpunkte der Lage nach kennt und weiss, wie dieselben unter einander durch Kanten zu verbinden sind. Zur Darstellung eines Polyeders ist daher genügend, alle seine Ecken in die zwei Tafeln zu projizieren und die Risse in vorgeschriebener Weise zu verbinden. Dabei bildet die stetige Aufeinanderfolge derjenigen Kanten, welche die äussersten Ecken unter sich verbinden, den Umriss des Körpers, welcher demnach die Risse aller übrigen Ecken einschliesst. Der Umriss ist ein erster oder zweiter, je nachdem er der ersten oder zweiten Tafel angehört; er kann bei einem konvexen Polyeder keinen einspringenden Winkel haben und muss ein konvexes Polygon sein.

§ 78. Betrachtet man ein Polyeder von irgend einem Standpunkt aus, so wird man in der Regel nur einen Teil seiner Ecken und Kanten wirklich sehen, während die übrigen durch gewisse

Begrenzungsebenen verdeckt oder unsichtbar sind. Die dem Auge nicht sichtbaren Linien werden auch in der Zeichnung als solche kenntlich gemacht dadurch, dass man sie bloß punktiert.

Für die Darstellung nimmt man die Tafeln gewöhnlich so an, dass der abzubildende Körper im I. Quadranten liegt; ferner wird das betrachtende Auge in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ über derselben, in Bezug auf $\mathfrak{T}_2$ vor ihr in unendlicher Entfernung gedacht. Demgemäss kann ein Punkt in der einen Tafel sichtbar, in der andern unsichtbar sein, immer aber wird von zwei Punkten, welche sich decken, derjenige unsichtbar sein, welcher der betreffenden Tafel näher liegt oder von ihr den kleineren Abstand hat.

Für die Sichtbarkeit von Punkten und Geraden lassen sich folgende allgemeine Regeln aufstellen:

1) Der Umriss in jeder Tafel ist sichtbar, weil er denjenigen Linienzug darstellt, welchen das Auge längs der Oberfläche des Körpers verfolgt, um den unsichtbaren Teil vom sichtbaren abzusondern.

2) Von den nicht dem Umriss angehörigen Kanten sind jene ganz sichtbar, welche einen nicht im Umriss liegenden sichtbaren Punkt enthalten, dagegen jene ganz unsichtbar, welche einen nicht im Umriss liegenden unsichtbaren Punkt enthalten.

3) Alle von einer sichtbaren Ecke (innerhalb des Umrisses) auslaufenden Kanten sind sichtbar, alle von einer unsichtbaren ausgehenden unsichtbar. Fallen jedoch die Risse der letzteren mit Umrisslinien zusammen, so sind sie nach 1) auszuzeichnen.

4) Von sich kreuzenden Geraden, deren

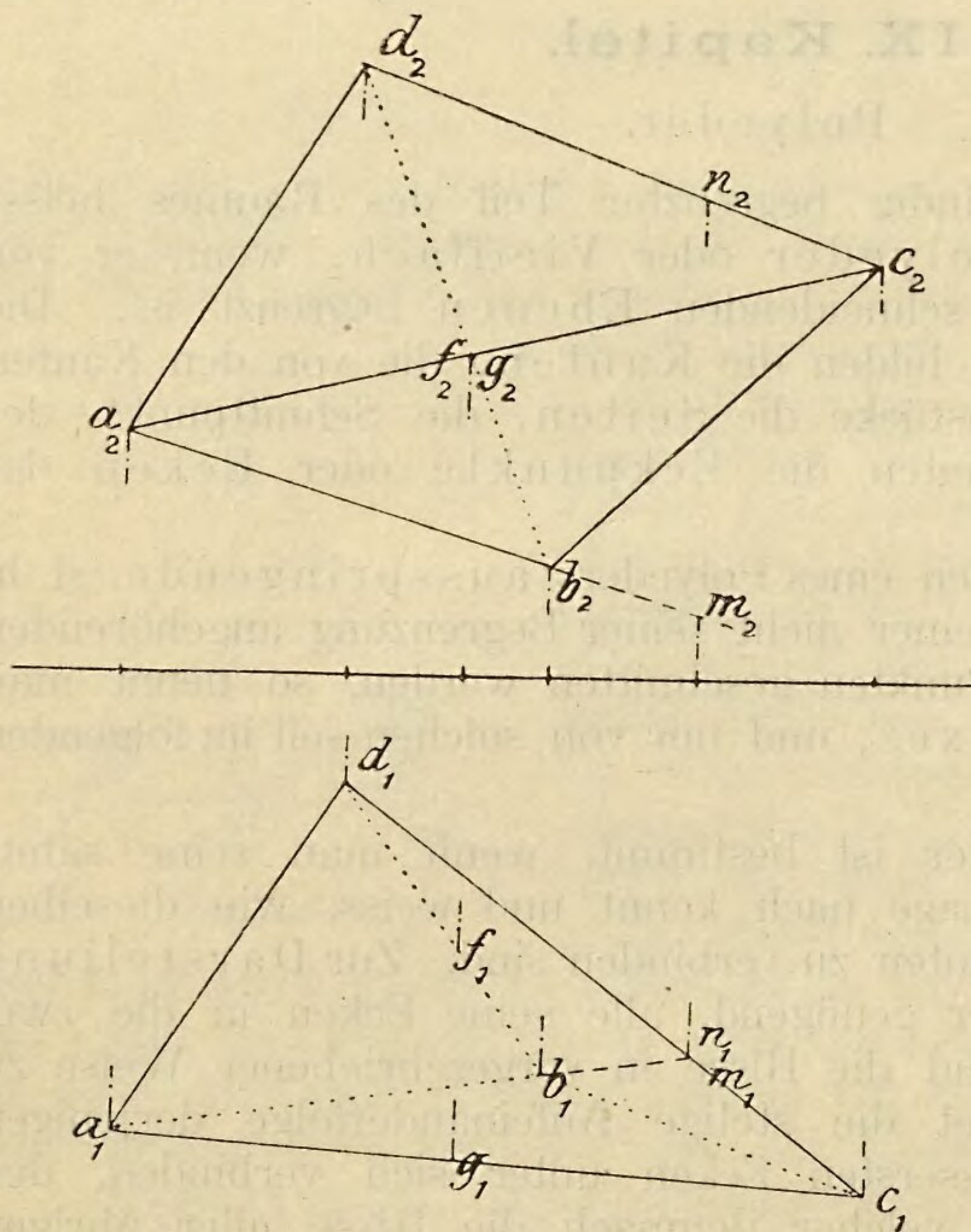


Fig. 92.

Risse sich schneiden, ist der eine Riss stets sichtbar, der andere unsichtbar. Um die Entscheidung darüber herbeizuführen, suche man die zugeordneten Risse der in dem Schnittpunkt der Risse vereinigten Deckpunkte, jener mit dem grösseren Abstand gehört der sichtbaren, der andere der unsichtbaren Geraden an.

Als Beispiel sind in Fig. 92 die Risse eines Tetraeders abcd

gezeichnet. Die Umrisse $a_1c_1d_1$ u. $a_2b_2c_2d_2$ sind auszuziehen; die Ecke b ist in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ unsichtbar, denn verlängert man z. B. a_1b_1 bis zum Durchschnitt m_1 (n_1) mit c_1d_1 und sucht die zugeordneten Risse m_2 u. n_2 der Deckpunkte m u. n , so liegt der Punkt m in der Geraden ab der $\mathfrak{T}_1$ näher, als der Punkt n in der Geraden cd ; ab ist daher für $\mathfrak{T}_1$ unsichtbar und damit auch der Eckpunkt b . Von den Geraden a_2c_2 u. b_2d_2 ist letztere zu punktieren, weil aus den ersten Rissen f_1 u. g_1 der Deckpunkte f u. g erhellt, dass f in bd der $\mathfrak{T}_2$ näher ist, als g in ac .

§ 79. Die Projektionen eines Polyeders auf die zwei Tafeln geben wohl ein mehr oder minder anschauliches Bild desselben, in vielen Fällen aber ist notwendig, auch die wahren Grössen der Kanten und Begrenzungsfiguren zu kennen. Man erhält dieselben durch die Entwicklung des Polyeders. Dazu denkt man sich das Polyeder längs einer Kante aufgeschnitten und breitet alle Seitenpolygone in ihrer wahren Gestalt und Aufeinanderfolge in eine einzige Ebene aus, in welche auch die Grund- und Deckfigur, an entsprechende Seiten derselben angefügt, gelegt werden. Die so erhaltene Figur wird das Netz des Polyeders genannt.

§ 80. Nach diesen einleitenden Erörterungen können wir zur Darstellung der gebräuchlichsten Polyeder übergehen. Doch schicken wir noch voraus, dass man bei freigestellter Wahl des Tafelsystems eine der Tafeln gewöhnlich mit einer Begrenzungsebene des Polyeders zusammenfallen lässt und überdies öfter mit Vorteil eine ihrer Kanten zur Achse senkrecht stellt.

I. Die Pyramide.

Das einfachste Polyeder entsteht dadurch, dass man ein Dreikant durch eine Ebene so schneidet, dass jede der drei Kanten getroffen wird. Man nennt diesen von 4 Dreiecken begrenzten Körper ein Tetraeder. Erweitert man diesen Vorgang dahin, dass man ein Vielkant d. h. beliebig viele in einem Punkte sich schneidende Ebenen durch eine neue Ebene schneidet, so entsteht eine Pyramide, ein Körper, welcher von einem Vieleck als Grundfläche und von ebensovielen Dreiecken als Seitenflächen begrenzt wird, als die Grundfläche Seiten hat. Der Scheitelpunkt des Vielkants heisst Spitze, die Kanten des Vielkants sind die Seitenkanten, die Seiten der Grundfläche die Grundkanten, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte ist die Höhe der Pyramide. Die Pyramide heisst n seitig, wenn sie von n Seitenflächen begrenzt ist, die Anzahl ihrer Kanten ist dann $2n$.

Eine Pyramide ist regelmässig oder unregelmässig, je nachdem ihre Grundfläche ein regelmässiges oder unregelmässiges Vieleck ist; sie ist gerade oder schief, je nachdem die Höhe die Grundfläche in ihrem Mittelpunkt trifft oder nicht.

Bemerkungen: 1) Ein Tetraeder kann als dreiseitige Pyramide aufgefasst werden, als deren Grundfläche jedes der 4 Begrenzungsdreiecke dienen kann.

2) Eine n seitige Pyramide ist durch $2n$ Stücke bestimmt, weil die Grundfläche deren $2n - 3$, die Spitze weitere drei Stücke erfordert.

s_3s der aus dem rechtwinkligen Dreiecke $s_3s_0's_4'$ gefundene Abstand ($= s_3s_4'$) des Punktes s von $\mathfrak{T}_3$ ist*). Die Strecke $a_0's_1$ dieses Viereckes liefert die O_1' des Punktes s oder den Punkt s_1 . Die Aufsuchung der zweiten Risse bietet keine Schwierigkeit. Man verlängere a_1b_1 u. a_1c_1 bis S_1 , projiziere die so erhaltenen Punkte der S_1 nach $\mathfrak{U}$ und verbinde sie mit a_2 , um im Schnitte mit den Achsenloten aus b_1 u. c_1 die Punkte b_2 u. c_2 zu bekommen. s_1s der Fig. 93^a liefert die zweite Ordinate von s und gibt s_2 .

Das Netz der Pyramide wird am einfachsten dadurch zustande gebracht, dass man auch die dritte Seitenfläche acs als $a_3c_3s_3$ um a_3c_3 in $\mathfrak{T}_3$ umlegt.

Übungsaufgaben: 1) Ein reguläres Tetraeder aus gegebener Kantenlänge zu zeichnen.

2) Ein Tetraeder aus den Winkeln und der Länge dreier in einem Eck zusammenstossenden Seiten zu konstruieren.

3) Eine sechsseitige Pyramide darzustellen, wenn deren Basis und drei nicht aufeinanderfolgende Seitenkanten gegeben sind.

4) Eine Pyramide aus Grundfläche, einer Seitenfläche und dem Winkel beider zu zeichnen.

5) Eine Pyramide aus Grundfläche und zwei zusammenstossenden Seitenflächen zu konstruieren.

6) Eine Pyramide aus Grundfläche, einer Seitenfläche und der Höhe darzustellen.

7) Eine Pyramide aus Grundfläche, Höhe und den Neigungswinkeln zweier zusammenstossenden Seitenflächen zur Grundfläche zu konstruieren.

8) Eine Pyramide aus Grundfläche, einer Seitenkante und ihrer Neigung zur Grundfläche, sowie aus dem Winkel einer Seitenfläche zur Grundfläche zu zeichnen.

Aufgabe 61. Einem gegebenen Tetraeder eine Kugel umzuschreiben.

Der Kugelmittelpunkt ist jener Punkt, welcher von allen Ecken gleichweit entfernt ist; die Aufgabe könnte daher auch so gestellt werden: Einen Punkt zu suchen, welcher von 4 gegebenen Punkten gleichen Abstand hat.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von drei gegebenen Punkten gleichweit abstehen, ist die Senkrechte, welche man im Mittelpunkt des dem Dreieck der 3 Punkte umschriebenen Kreises auf dessen Ebene errichtet. Man konstruiere daher zwei solche Senkrechte, um in ihrem Schnittpunkt sofort den gesuchten Punkt zu finden. Der Radius der Kugel ist dann nichts weiter als der Abstand dieses Punktes von einem beliebigen Eckpunkte.

Kann man die Grundfläche abc des Tetraeders $abcs$ in die $\mathfrak{T}_1$ legen, und überdies eine ihrer Seiten ab senkrecht zur Achse stellen, so ist die Lösung äusserst einfach. Der Mittelpunkt m_1 (Fig. 94) des dem Dreieck $a_1b_1c_1$ umschriebenen Kreises ist bereits der erste Riss des Kugelmittelpunktes. Klappt man sodann abs um a_1b_1 in die $\mathfrak{T}_1$ als $a_1b_1s_3$, so erhält man im Mittelpunkt m_3 dieses Dreiecks den dritten Riss von m . Um m_2 zu erhalten, konstruiere man das projizierende Viereck $a_2m_0m_2m_3'$, in welchem der Winkel α

*) Die Strecke s_3s könnte auch nach der anderen Seite von $a_0's_3$ aufgetragen werden, wenn die Lage von s nicht genauer angegeben ist.

des Systems, die O_1' von m , nämlich $a_2m_0 = m_0'm_1$, und die O_3 von m , nämlich $a_2m_3' = m_0'm_3$ bekannt sind. Die Strecke m_0m_2 dieses Vierecks ist die O_2 für m .

Liegen die 4 Punkte beliebig im Raume, so kann man durch Einführung neuer Tafeln den Fall auf den vorigen zurückbringen; man kann aber auch drei beliebige Kanten sa , sb , sc durch senkrechte Ebenen halbieren, welche in ihrem Schnittpunkte ebenfalls den geforderten Kugelmittelpunkt liefern. Diese Lösung zeigt Fig. 95. Man ziehe durch den Mittelpunkt d_2 der a_2s_2 die Gerade $d_2k_2 \perp a_2s_2$, durch d_1 die $d_1k_1 \parallel \mathcal{A}$, dann geht durch deren Spur k_1 auch die erste Spur S_1 der Halbierebene senkrecht zu a_1s_1 , deren zweite Spur T_2

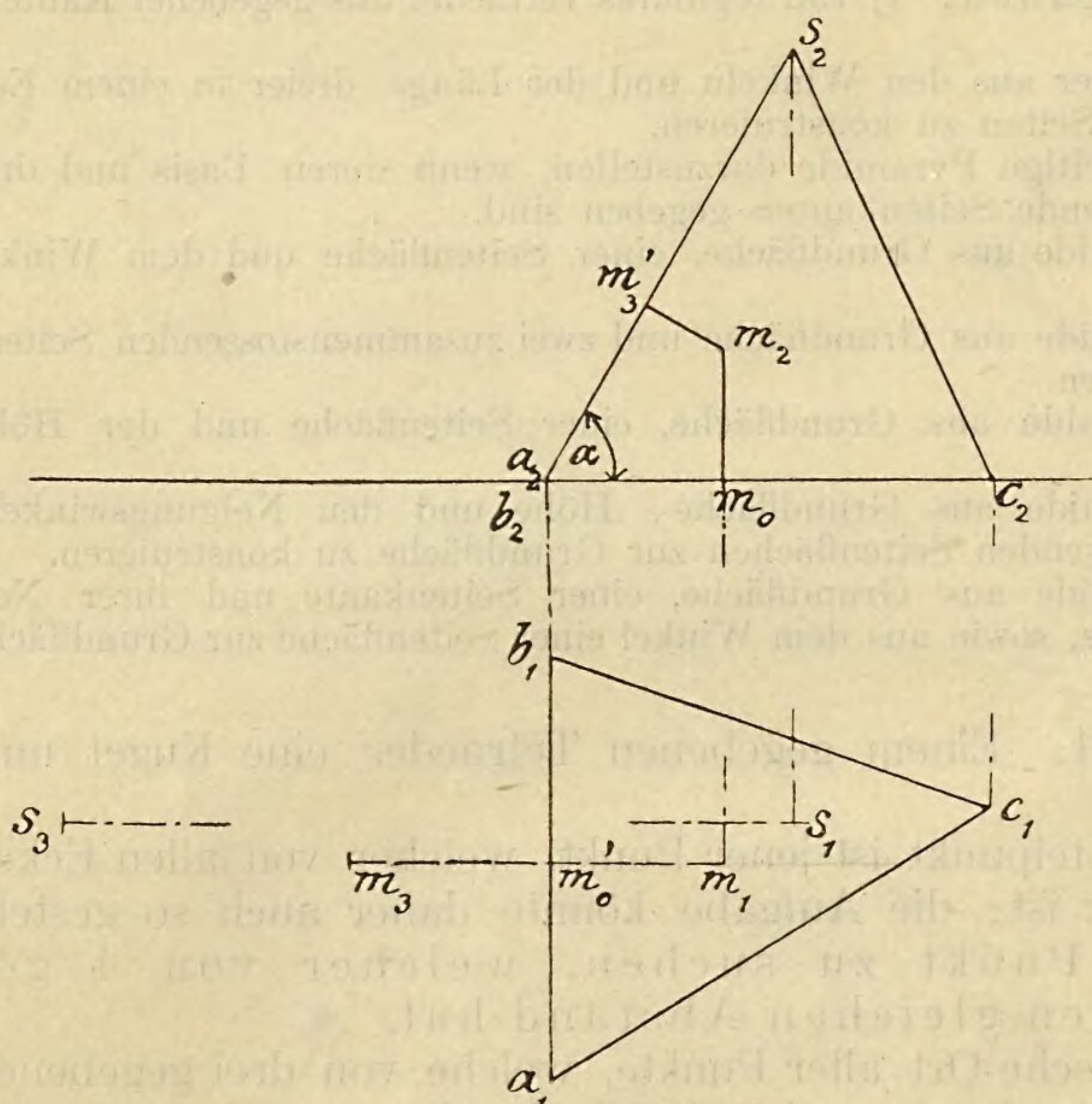


Fig. 94.

Kugel einzuschreiben, oder: Denjenigen Punkt aufzusuchen, welcher von vier sich schneidenden Ebenen gleichen Abstand hat.

Der verlangte Punkt ist der Schnittpunkt dreier Ebenen, welche jeweilen die Neigungswinkel zweier Begrenzungsflächen des Tetraeders halbieren.

Man lege (Fig. 96) abc in $\mathcal{T}_1$ und stelle $a_1b_1 \perp \mathcal{A}$, dann ist der Winkel $s_2a_2c_2$ bereits der Winkel der Seitenfläche abs mit der Grundfläche ($\mathcal{T}_1$) und die Ebene A_1B_2 die Halbierebene dieses Winkels. Behufs Konstruktion der Neigungswinkel an ac und bc konstruiere man die Neigungsdreiecke des Punktes s zu der $\mathcal{T}_1$ in $s_1s_0's_2$ u. $s_1s_0''s_2$ und halbiere die Neigungswinkel β u. γ durch die Geraden $s_0'n$ u. $s_0''f$. Die ersten Risse der Punkte n u. f fallen in s , n_2 u. f_2 liegen in der Entfernung s_1n u. s_1f über der Achse.

leicht nachzubringen ist. Aufgleiche Weise werden die Spuren $M_1 N_2$ der Halbierebene von bs gefunden und die Spurparallelen G u. H der dritten Halbierebene von cs ermittelt. Nun sucht man die Schnittlinie A_1A_2 der ersten beiden Ebenen und schliesslich den Schnittpunkt der A mit Ebene GH , welcher der gesuchte Kugelmittelpunkt m ist.

Aufgabe 62. Einem gegebenen Tetraeder eine

Die Halbierungsebene des Winkels an ac ist nun die Ebene acn und ihr Durchschnitt mit der erst gefundenen Halbierebene A_1B_2 die Gerade B_2B_1 , welche die Halbierungsebene bcf des Neigungswinkels an bc im gesuchten Punkte m_2m_1 trifft. Der Abstand desselben von einer der 4 Ebenen, hier die Gerade m_0m_2 ist der Radius der Kugel.

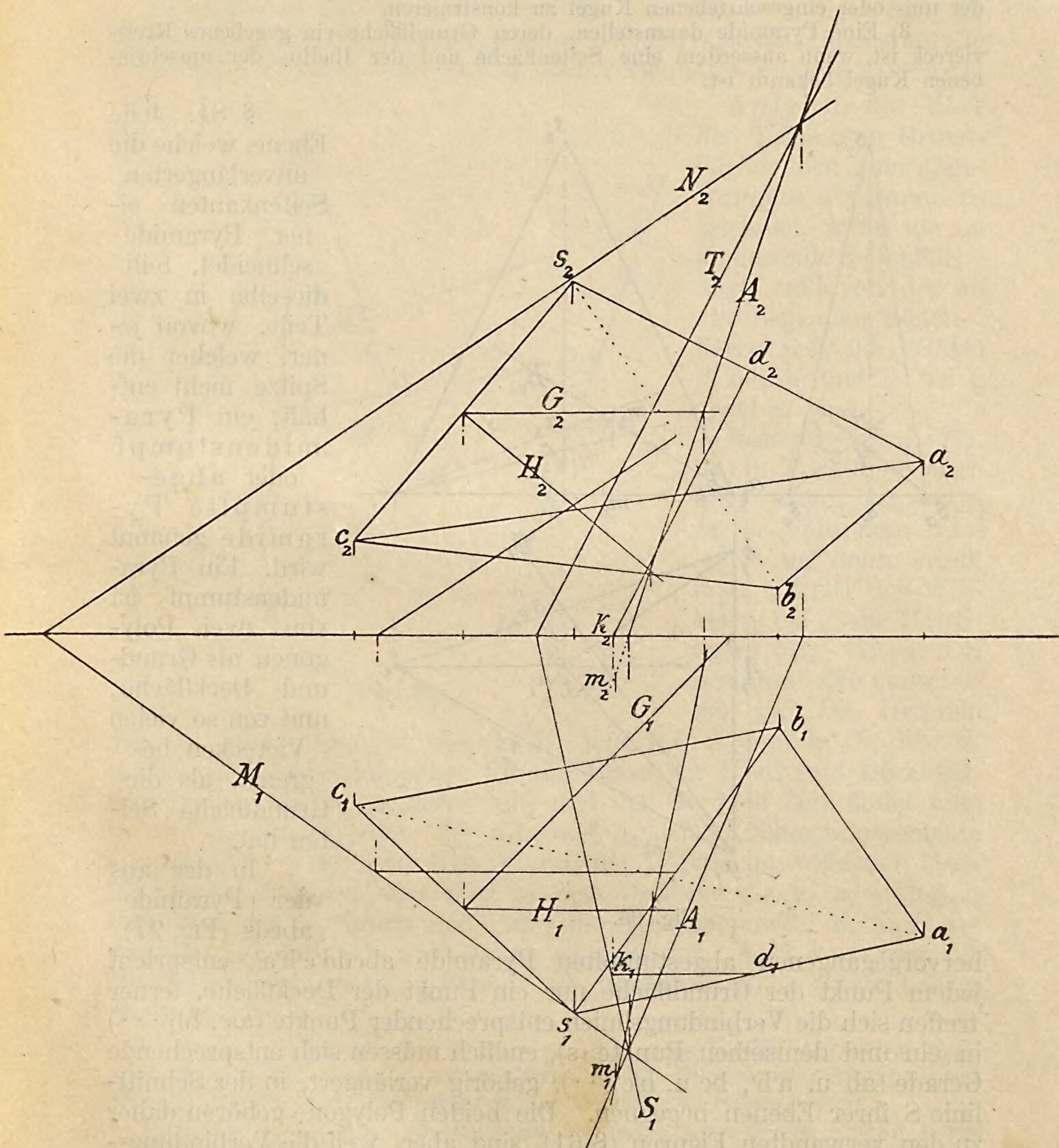


Fig. 95.

Hat das Tetraeder eine beliebige Raumlage, so kann man entweder nach Aufg. 48 die Neigungswinkel irgend dreier Ebenen zur vierten aufsuchen, sie halbieren und den Schnittpunkt der drei so

gefundenen Halbierebenen herstellen; oder man bringe durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Tafelsystems $\mathcal{T}_3\mathcal{T}_4$ den Fall auf den vorigen zurück.

Übungsaufgaben: 1) Eine gerade regelmässige Pyramide zu zeichnen, wenn ihre Grundfläche und der Radius der um- oder eingeschriebenen Kugel gegeben sind.

2) Eine gerade regelmässige Pyramide aus der Höhe und dem Radius der um- oder eingeschriebenen Kugel zu konstruieren.

3) Eine Pyramide darzustellen, deren Grundfläche ein gegebenes Kreisviereck ist, wenn ausserdem eine Seitenfläche und der Radius der umschriebenen Kugel bekannt ist.

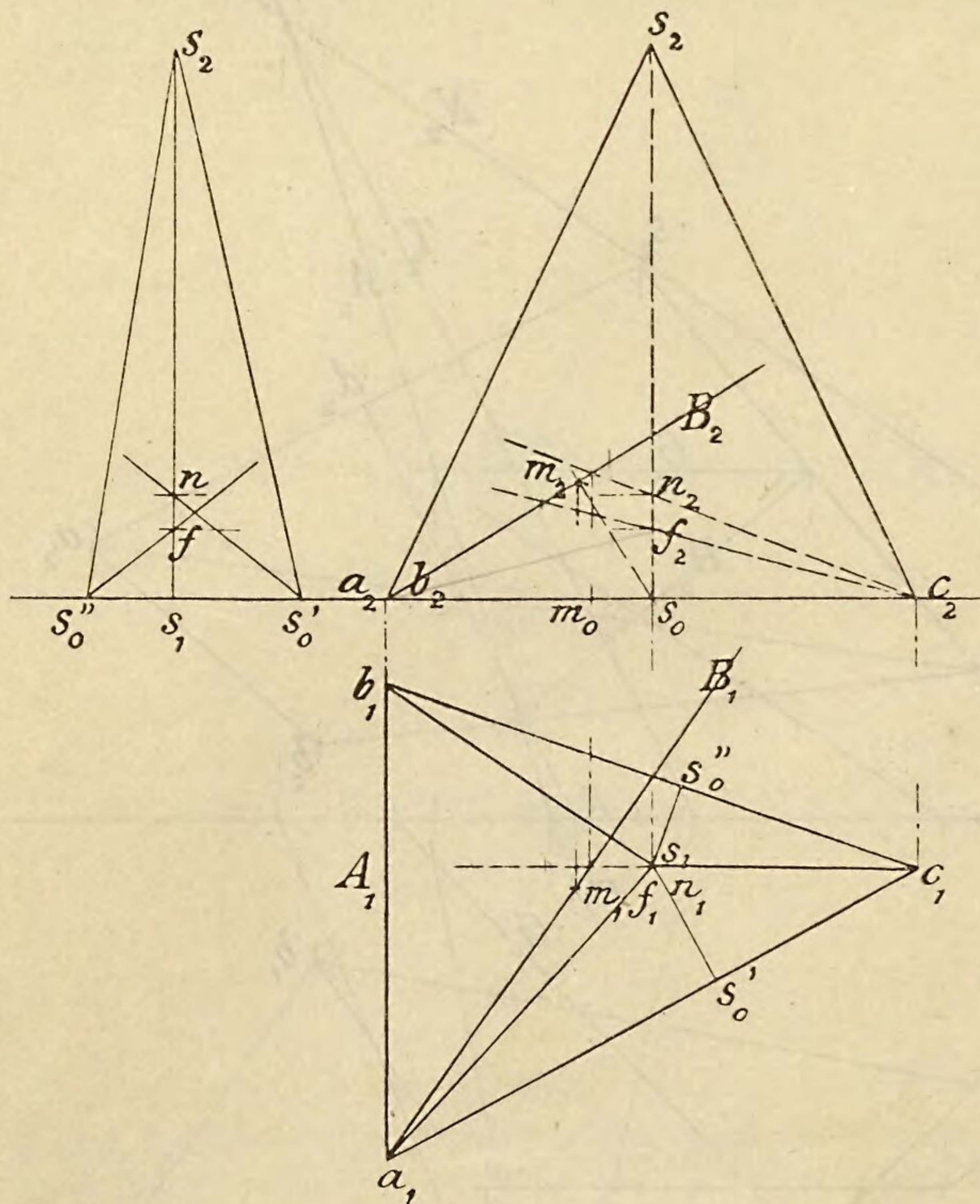


Fig. 96.

§ 81. Jede Ebene, welche die unverlängerten Seitenkanten einer Pyramide schneidet, teilt dieselbe in zwei Teile, wovon jener, welcher die Spitze nicht enthält, ein Pyramidenstumpf oder abgestumpfte Pyramide genannt wird. Ein Pyramidenstumpf ist von zwei Polygonen als Grund- und Deckfläche, und von so vielen Vierecken begrenzt, als die Grundfläche Seiten hat.

In der aus der Pyramide abcds (Fig. 97)

hervorgegangenen abgestumpften Pyramide abcd d'c'b'a' entspricht jedem Punkt der Grundfläche nur ein Punkt der Deckfläche, ferner treffen sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte (aa' , $bb' \dots$) in ein und demselben Punkte (s), endlich müssen sich entsprechende Gerade (ab u. $a'b'$, bc u. $b'c' \dots$), gehörig verlängert, in der Schnittlinie S ihrer Ebenen begegnen. Die beiden Polygone gehören daher zu den verwandten Figuren (§ 61), sind aber, weil die Verbindungslinien entsprechender Punkte sich im Endlichen schneiden, nicht affin, sondern man nennt sie kollinear (räumliche Kollineation). s ist das Kollineationszentrum, S die Kollineationsachse.

Alle diese Beziehungen bleiben bestehen, wenn man die Pyra-

midenspitze und die Deckfläche in die Ebene der Grundfläche projiziert, daher: Die Risse der Grund- und Deckfläche eines Pyramidenstumpfes sind kollineare Figuren, die Kollineationsachse ist der Riss der Schnittlinie ihrer Ebenen und das Kollineationszentrum der Riss der Spitze der vollständigen Pyramide (ebene Kollineation).

Rückt die Kollineationsachse in's Unendliche, d. h. werden die Ebenen der Grund- und Deckfläche parallel (parallel abgestumpfte Pyramide), so heissen die immer noch verwandten Figuren ähnlich.

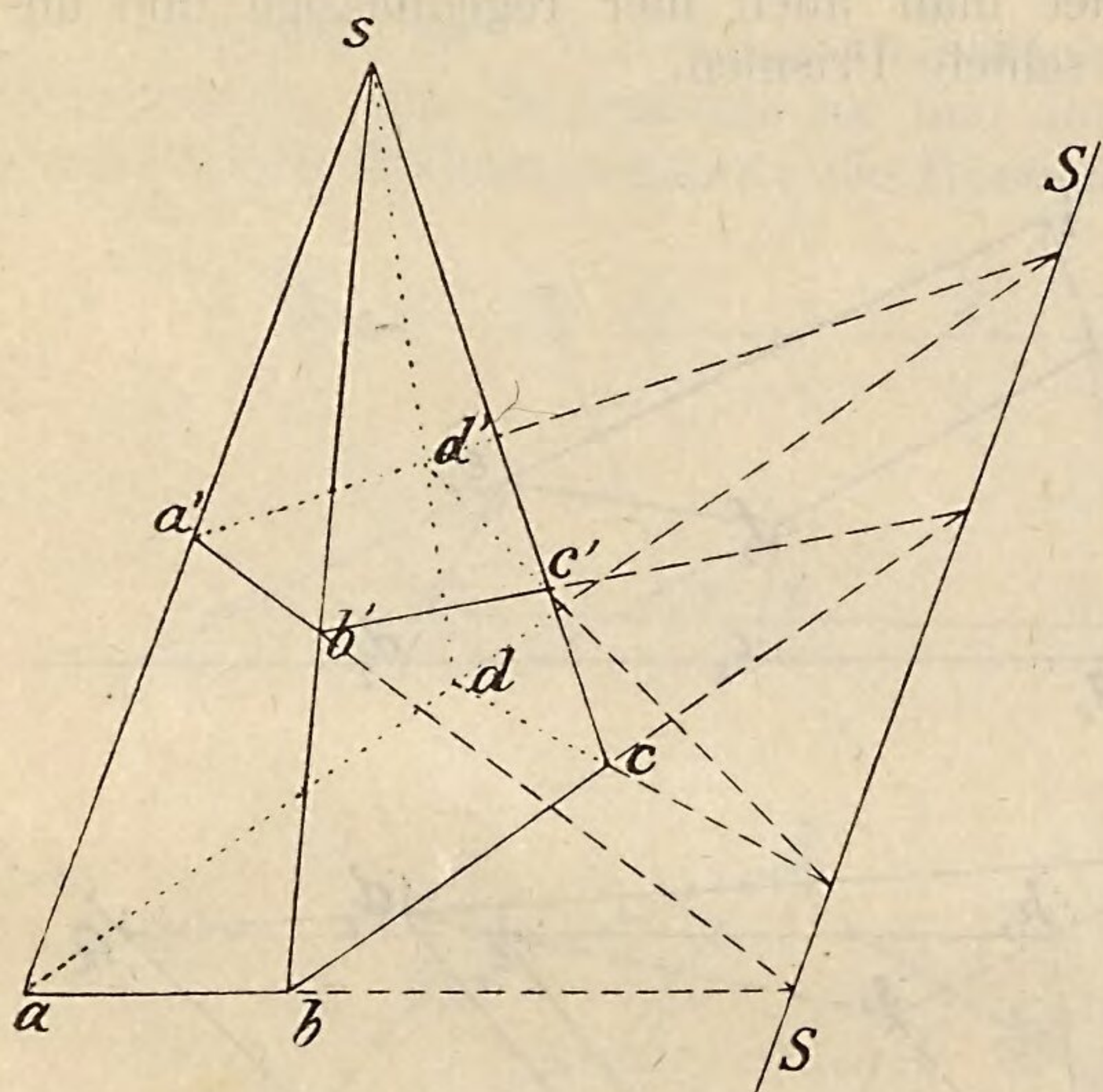


Fig. 97.

a_1b_1 u. g_3h_3 schneiden sich in M, jene g_4f_4 u. b_1c_1 in N, MN ist daher die Kollineationsachse für die Risse der Basis und Deckfigur. Im Schnitte des Achsenlotes h_3h_1 und der Geraden Mg_1 findet man h_1 und im Schnittpunkte der a_1h_1 und b_1g_1 das Kollineationszentrum s_1 , worauf sich der erste Riss $g_1h_1e_1f_1$ der Deckfläche vollenden lässt. Die zweite Ordinate von g ist in dem Dreiecke $g_3g_0'g_1$ oder $a_2g_0g_2$ enthalten, aus g_2 lassen sich mit Hilfe der Spurpunkte M, N, Q der Geraden gh, fg u. eh noch h_2 , f_2 , e_2 auffinden. Auch kann man zur Herstellung des zweiten Risses das unschwer zu bestimmende s_2 verwenden.

Übungsaufgaben: 1) Eine parallel abgestumpfte dreiseitige Pyramide zu zeichnen, wenn ausser der Grundfläche die Höhe des Stumpfes und die Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche bekannt sind.

2) Eine dreiseitige abgestumpfte Pyramide zu zeichnen, wenn deren Grundfläche, die Seitenkanten und ihre Neigungswinkel zur Grundfläche gegeben sind.

3) Eine vierseitige abgestumpfte Pyramide zu zeichnen, wenn ihre Grundfläche und eine Seitenfläche, der Neigungswinkel beider und der Winkel der Deckebene mit der Grundflächeebene gegeben sind.

Aufgabe 63. Über der bekannten Grundfläche abcd eine abgestumpfte Pyramide zu zeichnen, wenn die an ab liegende Seitenfläche abgh, und von der an bc liegenden Seitenfläche bcfg die Winkel β bei b und γ bei g gegeben sind.

Man lege abcd (Fig. 98) in $\mathfrak{T}_1$, klappe abgh um, trage $b_1g_4 = b_1g_3$ an b_1c_1 unter dem Winkel β an, dann erhält man mittelst des Winkels γ bei g_4 die Richtung g_4f_4 . Aus g_3 u. g_4 bestimmt sich unmittelbar g_1 . Die Geraden

Das Prisma.

§ 82. Lässt man die Spitze einer Pyramide in's Unendliche hinausrücken, so dass sämtliche Seitenkanten einander parallel werden, und schneidet man dann alle Seitenflächen durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so entsteht ein Körper, welcher von zwei beliebigen, aber kongruenten Polygonen als Grund- und Deckflächen, und von lauter Parallelogrammen als Seitenflächen begrenzt wird. Derselbe wird Prisma genannt. Die Entfernung zwischen Grundfläche und Deckfläche ist die Höhe des Prisma's. Wie bei der Pyramide unterscheidet man auch hier regelmässige und unregelmässige, gerade und schiefe Prismen.

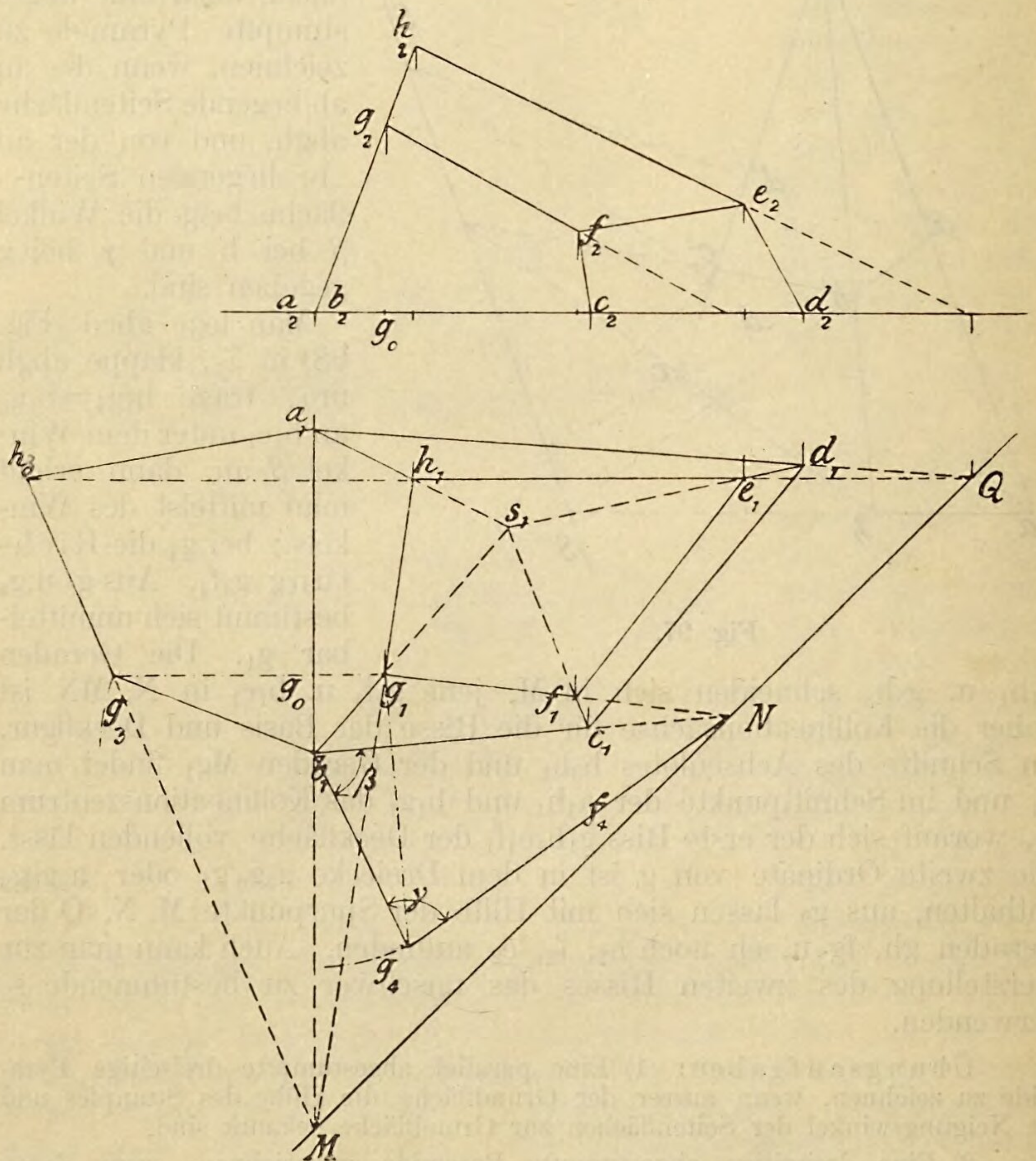


Fig. 98.

Nach den Bemerkungen des § 81 ist leicht einzusehen, dass Grund- und Deckfläche sowohl im Raume, als auch in ihren Rissen auf ein und dieselbe Tafel verwandte Figuren sind, für welche

sowohl die Verwandtschaftsachse als das Zentrum im Unendlichen liegen; man nennt solche Figuren kongruent.

Zur bequemeren Darstellung legt man die Grundfläche gewöhnlich in $\mathfrak{T}_1$; auch kann man eine Seitenfläche mit $\mathfrak{T}_1$ zusammenfallen lassen, und wenn man dann die Seitenkanten senkrecht zu $\mathfrak{T}_2$ stellt, so wird der zweite Riss ein Polygon, das Profil genannt.

Bemerkung: Ein n seitiges Prisma erfordert zu seiner Bestimmung ausser der Grundfläche ($2n-3$ Stücke) noch 3 weitere Stücke, wovon 2 zur Festlegung der Richtung der Seitenkanten und eines zur Festlegung der Deckfläche dient, im Ganzen daher $2n$ Stücke.

Aufgabe 64. Von einem fünfseitigen Prisma sind die Grundfläche $abcde$, eine Seitenkante ak und ihre Winkel mit den anliegenden Grundkanten bekannt; die Risse des Prisma's zu zeichnen.

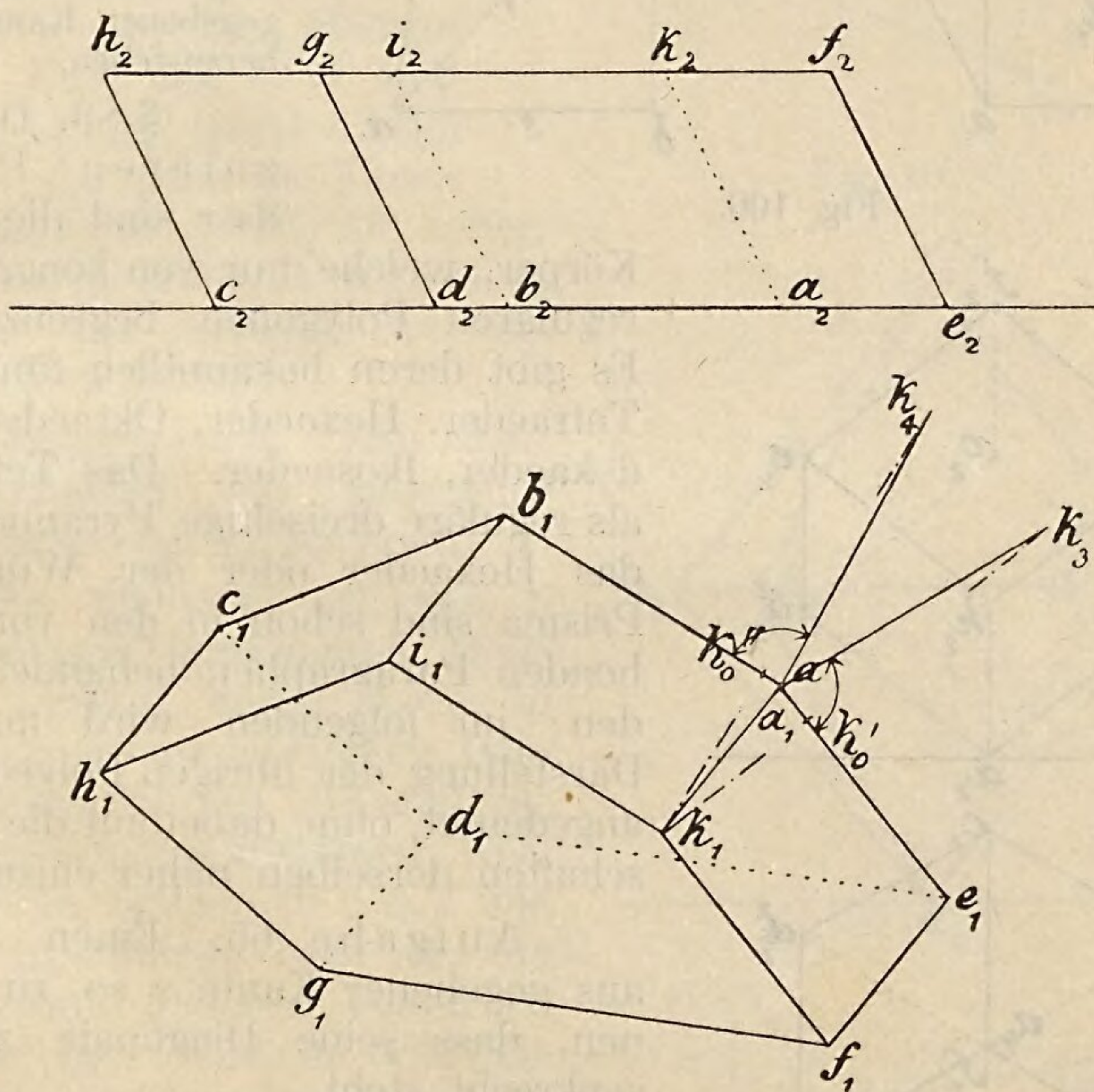


Fig. 99.

Lege die Grundfläche (Fig. 99) in $\mathfrak{T}_1$, klappe ak einmal als a_1k_3 , dann als a_1k_4 um und suche k_1 , worauf sich die der Grundfläche kongruente Deckfläche $f_1g_1h_1i_1k_1$ vollenden lässt. Die zweite Ordinate des Punktes k ergibt sich aus einem der projizierenden Dreiecke $k_1k_0'k_3$ oder $k_1k_0''k_4$, die Parallele zur Achse durch k_2 ist geometrischer Ort für die zweiten Risse der übrigen Eckpunkte.

Zur Herstellung des Netzes kann man entweder alle Seitenflächen um ihre Grundkanten umklappen und an eine Deckkante die Deckfläche fügen, oder man schneidet das Prisma längs einer Kante auf, breitet alle Seitenflächen in die Zeichenebene, und fügt Grund- und Deckfläche an eine ihrer Begrenzungskanten an.

Übungsaufgaben: 1) Von einem Parallelepipedon (Säule), einem Prisma, welches von lauter Parallelogrammen begrenzt ist, kennt man drei von einer Ecke auslaufende Kanten und die Winkel, welche sie miteinander bilden; dasselbe ist zu zeichnen.

2) Ein gerades Prisma hat zur Grundfläche ein reguläres Sechseck mit gegebener Seite, auch ist seine Höhe bekannt; dasselbe ist zu zeichnen, so zwar, dass eine Seitenfläche mit $\mathfrak{T}_1$ zusammenfällt.

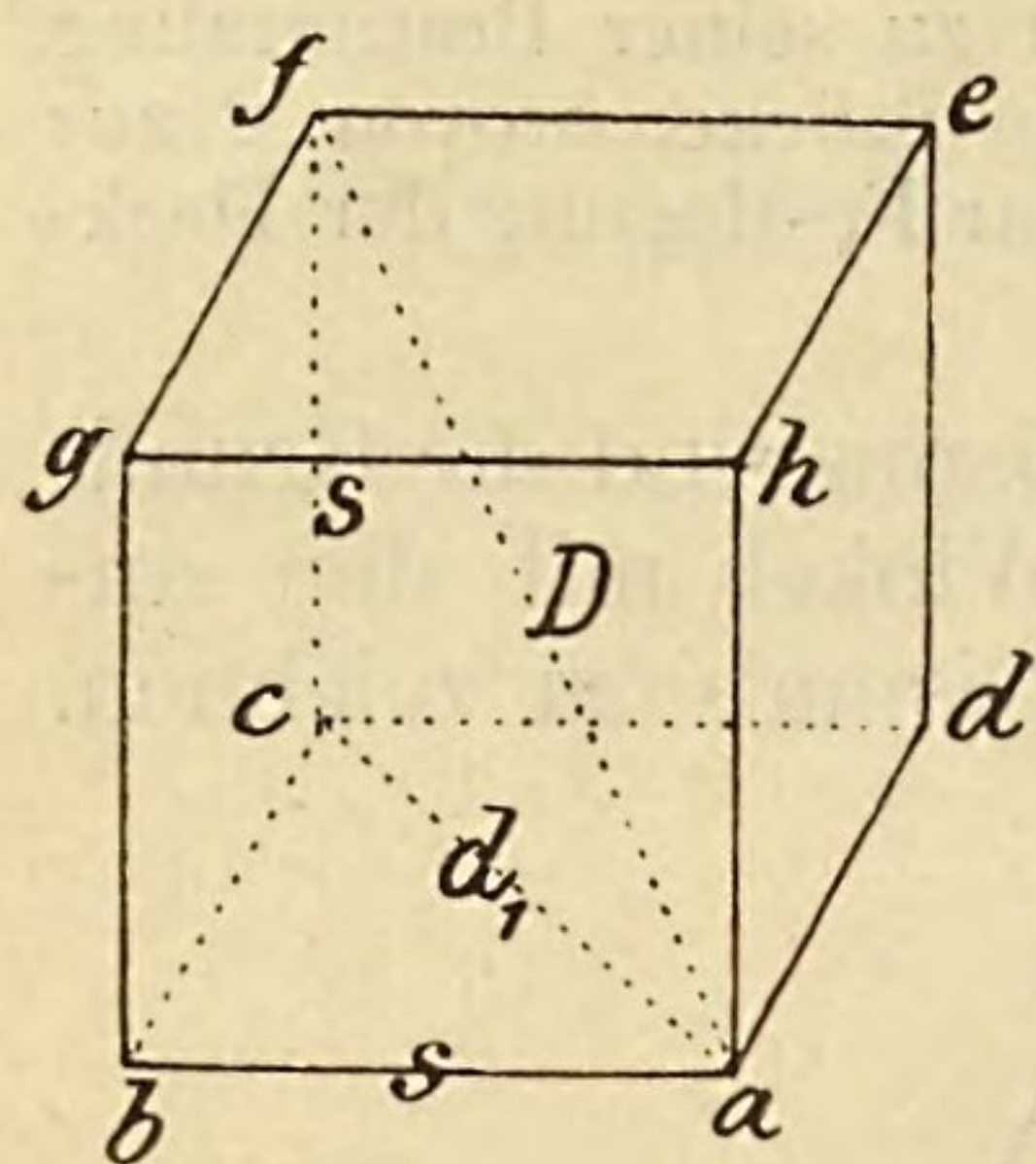
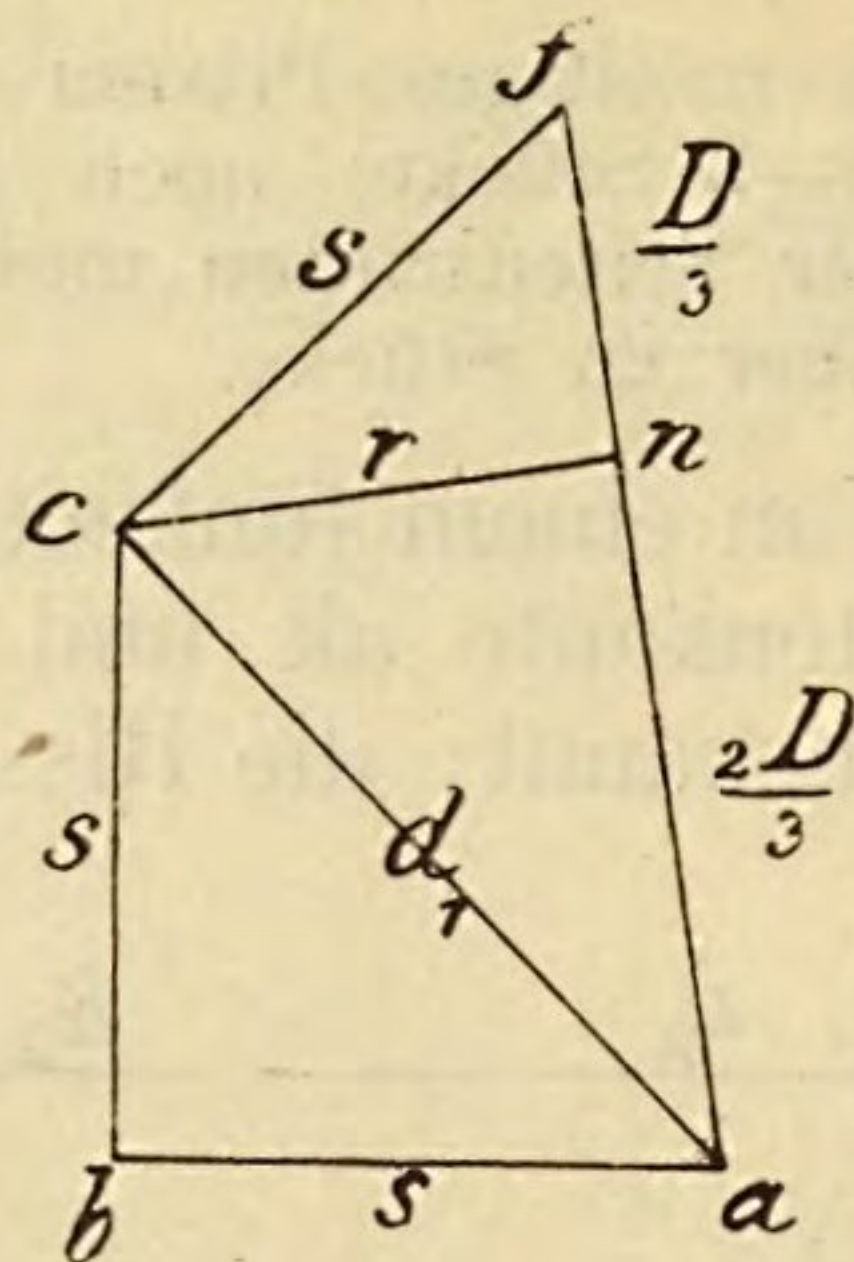


Fig. 100.



3) Ein Prisma zu konstruieren, wenn seine Grundfläche, seine Höhe und die Neigungswinkel zweier aufeinanderfolgender Seitenflächen zur Grundfläche gegeben sind.

4) Einen Würfel (reguläres Hexaeder) aus gegebener Kantenlänge herzustellen.

§ 83. Die regulären Polyeder sind diejenigen

Körper, welche nur von kongruenten regulären Polygonen begrenzt sind. Es gibt deren bekanntlich fünf: das Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Das Tetraeder als reguläre dreiseitige Pyramide und das Hexaeder oder der Würfel als Prisma sind schon in den vorhergehenden Paragraphen behandelt worden; im folgenden wird nun die Darstellung der übrigen Polyeder nur angedeutet, ohne dabei auf die Eigenschaften derselben näher einzugehen.

Aufgabe 65. Einen Würfel aus gegebener Kante s so zu zeichnen, dass seine Diagonale zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht.

Man konstruiere zunächst (Fig. 100) aus s die Diagonale d_1 einer Seitenfläche, und aus d_1 u. s die Diagonale D des Würfels.

Dreht man nun den Würfel soweit, bis die Diagonale D auf $\mathfrak{T}_1$, etwa im Punkte a senkrecht steht, so gruppieren sich die übrigen Ecken dergestalt um die Diagonale, dass je drei davon in zwei zu $\mathfrak{T}_1$ parallelen Ebenen symmetrisch um den Schnittpunkt der Diagonale mit jeder Ebene liegen. Ihre ersten Risse bilden daher zwei gleichseitige symmetrisch liegende Dreiecke, oder ein reguläres Sechseck mit dem Mittelpunkt a_1 . Der Radius dieses Sechseckes ist der Abstand eines Eckes von der Diagonale und in der Figur

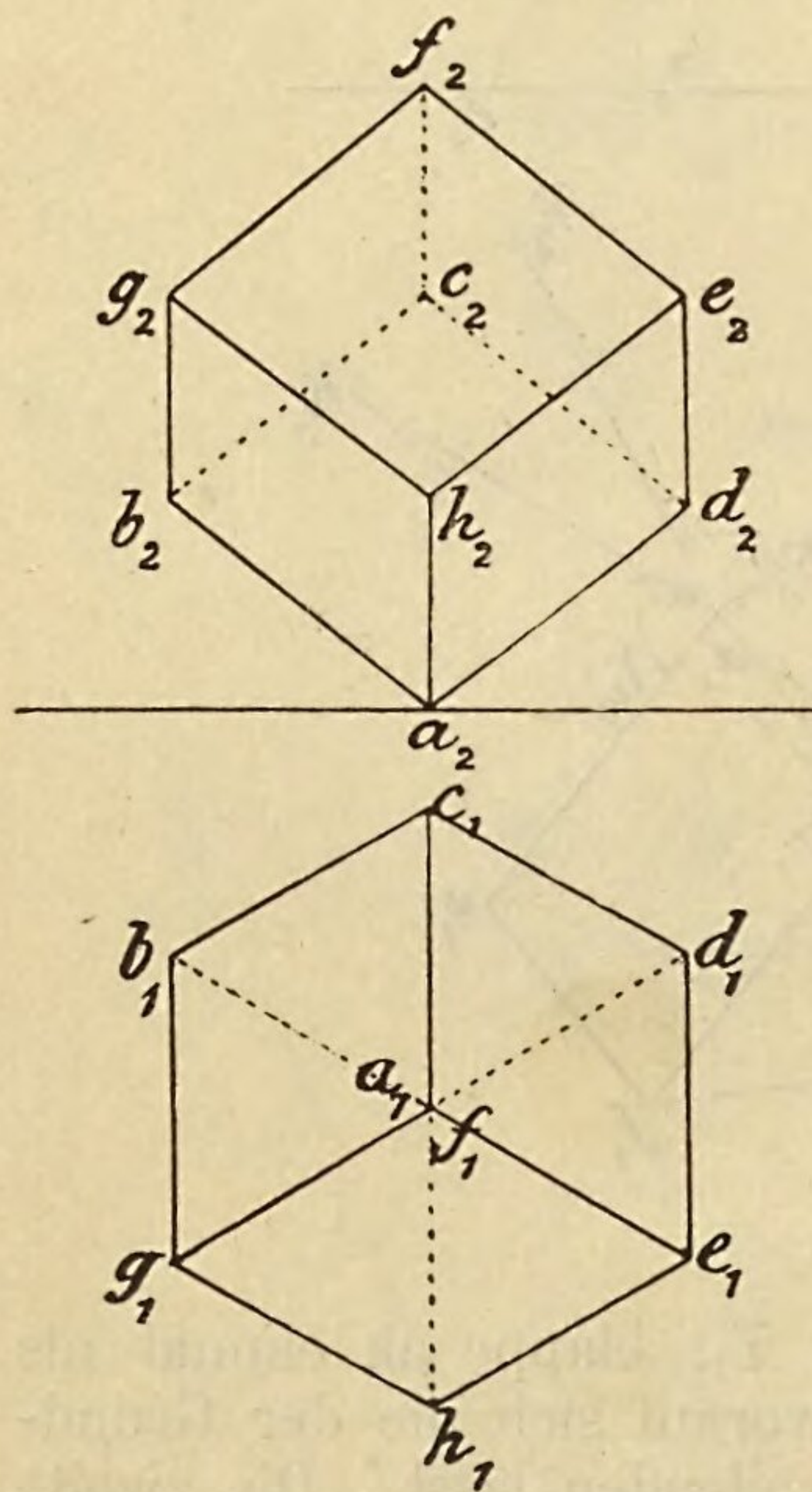


Fig. 101.

Punkte a senkrecht steht, so gruppieren sich die übrigen Ecken dergestalt um die Diagonale, dass je drei davon in zwei zu $\mathfrak{T}_1$ parallelen Ebenen symmetrisch um den Schnittpunkt der Diagonale mit jeder Ebene liegen. Ihre ersten Risse bilden daher zwei gleichseitige symmetrisch liegende Dreiecke, oder ein reguläres Sechseck mit dem Mittelpunkt a_1 . Der Radius dieses Sechseckes ist der Abstand eines Eckes von der Diagonale und in der Figur

durch cn dargestellt. Das Stück $fn = \frac{1}{3}$ der Diagonale gibt nun die Entfernung der Ebene der drei Punkte c, g, e von der Spitze f und zugleich wegen der Symmetrie den Abstand der Ebene der noch übrigen drei Punkte b, h, d von dem Fusspunkt a der Diagonale, womit alle Bestimmungsstücke für die beiden Risse gefunden sind. Man beschreibe (Fig. 101) aus $a_1 (f_1)$ mit dem Radius cn einen Kreis und konstruiere in demselben das reguläre Sechseck $c_1 b_1 g_1 h_1 e_1 d_1$, verbinde f_1 mit g_1, c_1, e_1 , ebenso a_1 mit b_1, d_1, h_1 . Hierauf mache man $a_2 f_2 = D$ und teile es in drei gleiche Teile in c_2 u. h_2 , ziehe die Parallelen $c_2 g_2 e_2$ und $h_2 d_2 f_2$ zur Achse, projiziere die ersten Risse in diese Geraden und verbinde die entsprechenden Punkte.

Aufgabe 66. Ein reguläres Oktaeder aus gegebener Kantenlänge (s) zu zeichnen.

Das Oktaeder ist von 8 gleichseitigen, kongruenten Dreiecken begrenzt, deren je vier in einer Ecke zusammenstossen. Dasselbe kann, wie Fig. 102 zeigt, als Doppelpyramide aufgefasst werden, deren Spitzen in a u. f und deren Grundfläche $bcde$ ist, ein Viereck mit gleichen Seiten (s) und gleichen Winkeln oder ein Quadrat. Solcher Quadrate gibt es noch $abfd$ u. $acfe$, deren Ebenen wechselseitig auf einander senkrecht stehen und deren Diagonalen $af = ec = bd$ die Achsen des Oktaeders genannt werden.

Nimmt man zur Darstellung die $\mathfrak{T}_1$ parallel dem Quadrat $bcde$, so projiziert sich dasselbe (Fig. 103) in wahrer Gestalt $b_1 c_1 d_1 e_1$, während die Risse der Ecken a u. f in den Schnittpunkt der Quadratdiagonalen fallen. Im

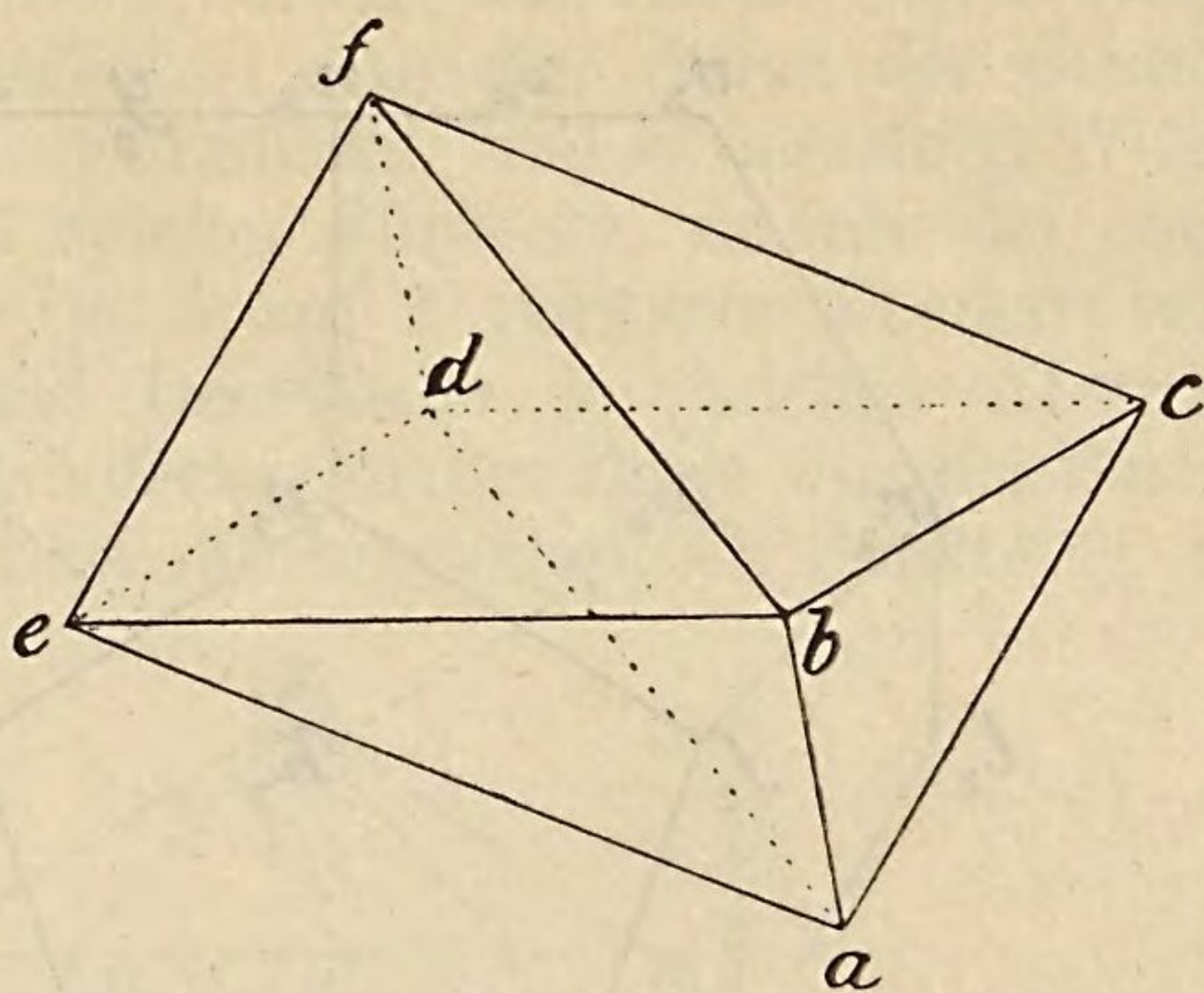


Fig. 102.

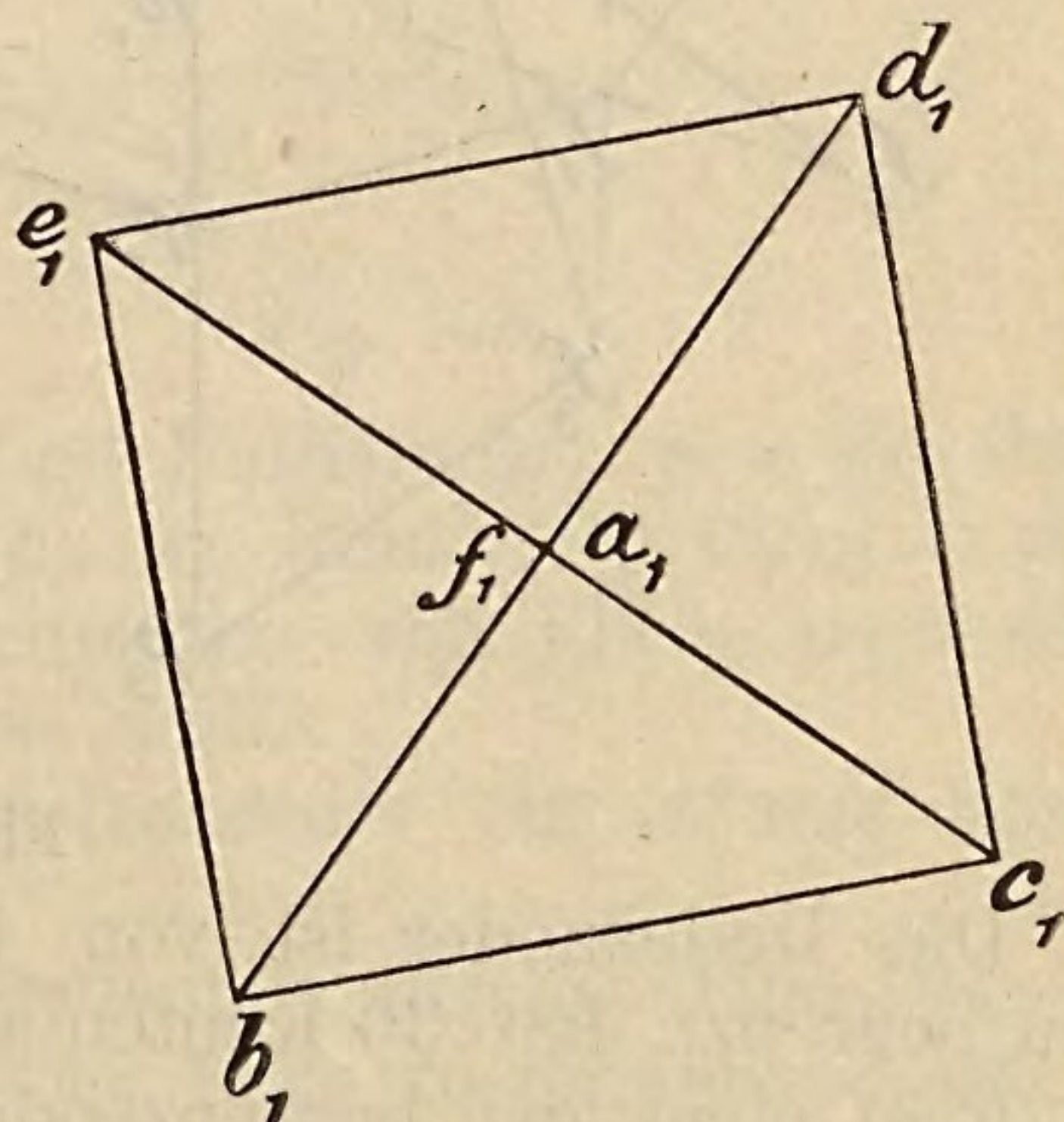
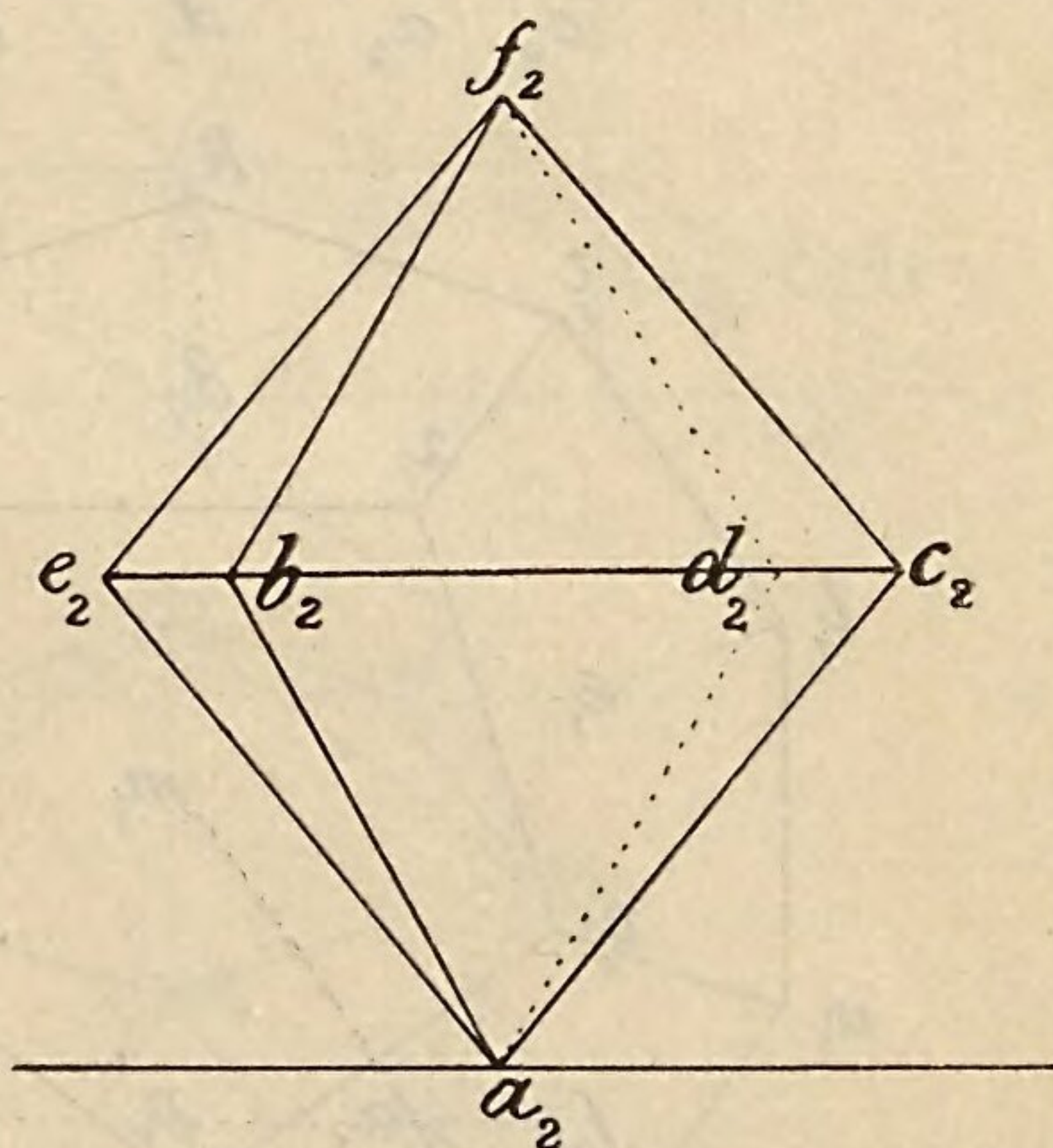


Fig. 103.

zweiten Riss ist $a_2f_2 \perp \mathfrak{A}$ gleich der Diagonale des Quadrates und wird durch die Gerade $b_2c_2d_2e_2 \parallel \mathfrak{A}$ halbiert.

Aufgabe 67. Ein reguläres Dodekaeder aus seiner Kantenlänge (s) herzustellen.

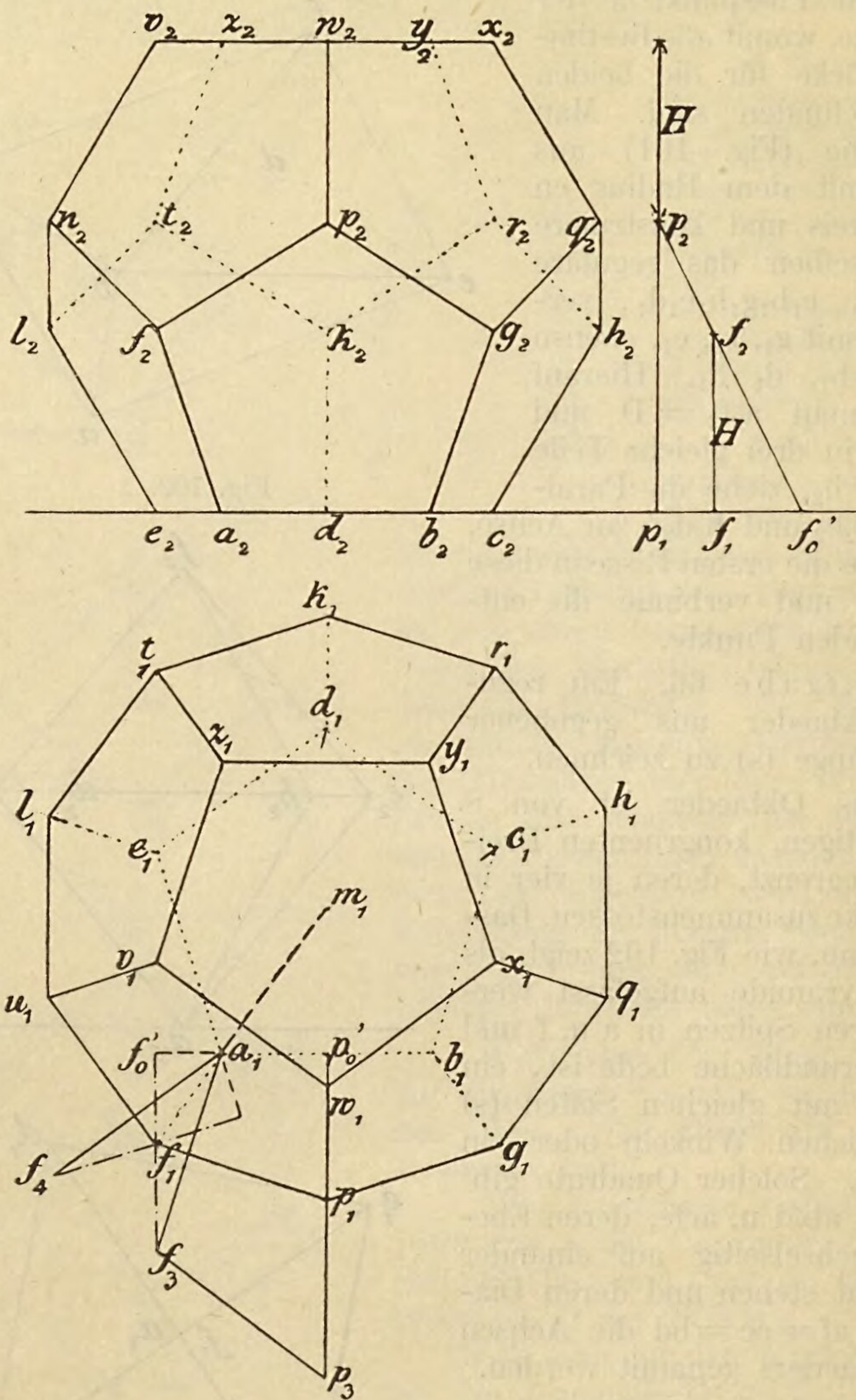


Fig. 104.

Das Dodekaeder ist von 12 kongruenten regelmässigen Fünfecken begrenzt, hat 30 Kanten und 20 kongruente dreiseitige Ecken. Legt man eines der begrenzenden Fünfecke $abcde$ (Fig. 104) in $\mathfrak{T}_1$, dann ist die Ebene des gegenüberliegenden Fünfeckes $vwxyz$ der Grundfläche parallel, beide Flächen haben vertikal über einander-

stehende Mittelpunkte und ihre Eckpunkte liegen symmetrisch zu einander und zu jenen Mittelpunkten. Die ersten Risse bilden so- nach ein reguläres Zehneck, dessen Mittelpunkt mit dem ersten Riss m_1 des wirklichen Mittelpunktes zusammenfällt. (Man konstruiere mit s ein reguläres Fünfeck, beschreibe darum einen Kreis und halbiere die Bögen des Fünfecks.) An den Seiten der Grund- fläche $abcde$ liegen nun weitere 5 Fünfecke, und in derselben Weise an den Seiten der Deckfläche 5 solcher Fünfecke, so dass die noch übrigen 10 Eckpunkte sich zu je 5 auf 2 parallele Ebenen ver- teilen, welche von Grund- und Deckfläche je gleichen Abstand haben. Klappt man zwei der Fünfecke an der Basis um die Basis- kanten um, (in der Figur sind bloß die umgeklappten Punkte f_3 , p_3 und f_4 gezeichnet), und fällt aus f_3 und f_4 die Lote auf a_1b_1 u. a_1e_1 , so erhält man in ihrem Schnitte f_1 . f_1a_1 halbiert den Winkel $f_4a_1f_3$ und somit auch den Winkel $b_1a_1e_1$ des Fünfecks, und geht durch m_1 ; die er- sten Risse der übrigen Punkte g, h, k, l liegen somit in der Peripherie des aus m_1 mit m_1f_1 beschriebenen Kreises. Die Risse der noch feh- lenden 5 Eckpunkte kommen dann wegen der Symmetrie der obern und unteren Hälfte des Dodekaeders in den- selben Kreis zu liegen und bilden mit jenen das reguläre Zehneck $f_1p_1g_1 \dots u_1$.

Die Entfernung der Punkte f, g, h, k, l von $\mathfrak{T}_1$ findet sich in dem Neigungsdreieck $f_1f_0'f_2$ des Punktes f als Kathete f_1f_2 , jene der Punkte p, q, r, t, u aus dem Dreieck $p_1f_0'p_2$ des Punktes p ($f_0'p_1 = p_1p_0'$), während die Abstände der Deckflächpunkte von Ebene $pqr tu$ gleich jener der Ebene $fghkl$ von der Basis sind.

Aufgabe 68. Ein reguläres Ikosaeder aus seiner Kanten- länge (s) herzustellen.

Das Ikosaeder ist von 20 kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von welchen je fünf in einer Ecke zusammenstossen, hat 30 Kanten und 12 Ecken. Seine Darstellung gestaltet sich am einfachsten, wenn wir eine seiner Hauptdiagonalen az (Fig. 105)

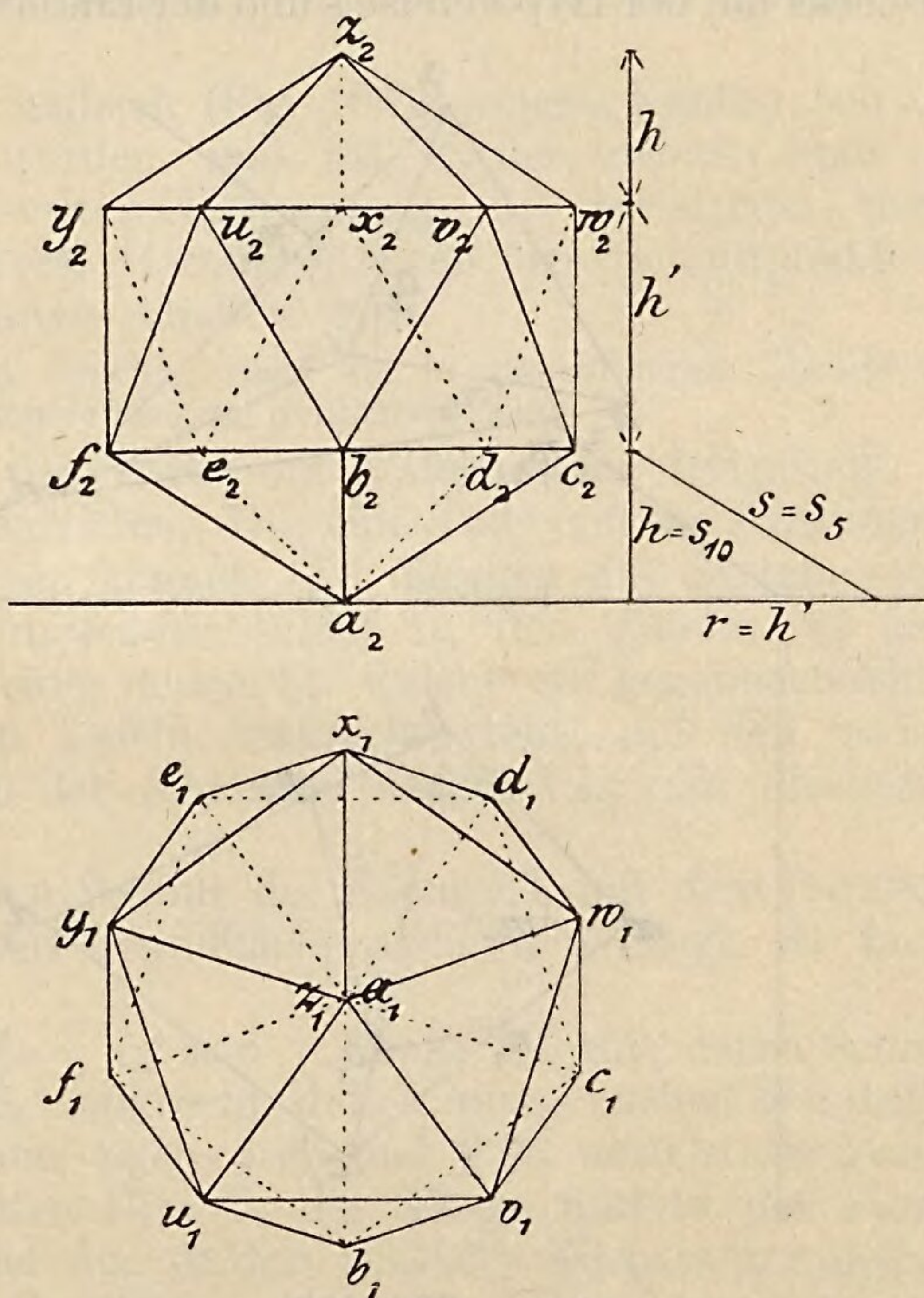


Fig. 105.

senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ stellen. Die in a u. z zusammenstossenden Dreiecke bilden je eine fünfseitige Pyramide, deren Grundflächen bcdef und uvwxy symmetrisch liegen und zu $\mathfrak{T}_1$ parallel sind, sich daher auf dieselbe als zwei reguläre symmetrisch liegende Fünfecke mit der Kantenlänge s als Seite projizieren. Alle 10 Eckpunkte zusammen bilden folglich das reguläre Zehneck $b_1v_1c_1 \dots u_1$ mit dem Mittelpunkt a_1 (z_1).

Die Höhe h beider Pyramiden ist Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks aus s als Hypotenuse und dem Radius r des dem Zehneck umschriebenen Kreises als zweiter Kathete, während die Höhe h' des noch übrig bleibenden Körpers oder der Abstand der beiden Parallelebenen cf und wy sich gleichfalls als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse s und der Entfernung c_1v_1 der ersten Risse

eines Punktes c der unteren Fläche u. eines anliegenden Punktes v der oberen Ebene als zweiter Kathete ergibt. Die letztere Gerade ist die Zehneckseite, und da bekanntlich die Fünfeck- (s_5), die Sechseck- (r) und die Zehneckseite (s_{10}) ein rechtwinkliges Dreieck bilden, so sind die beiden Höhen h und h' ein und demselben Dreiecke aus s_5 , r, u. s_{10} zu entnehmen.

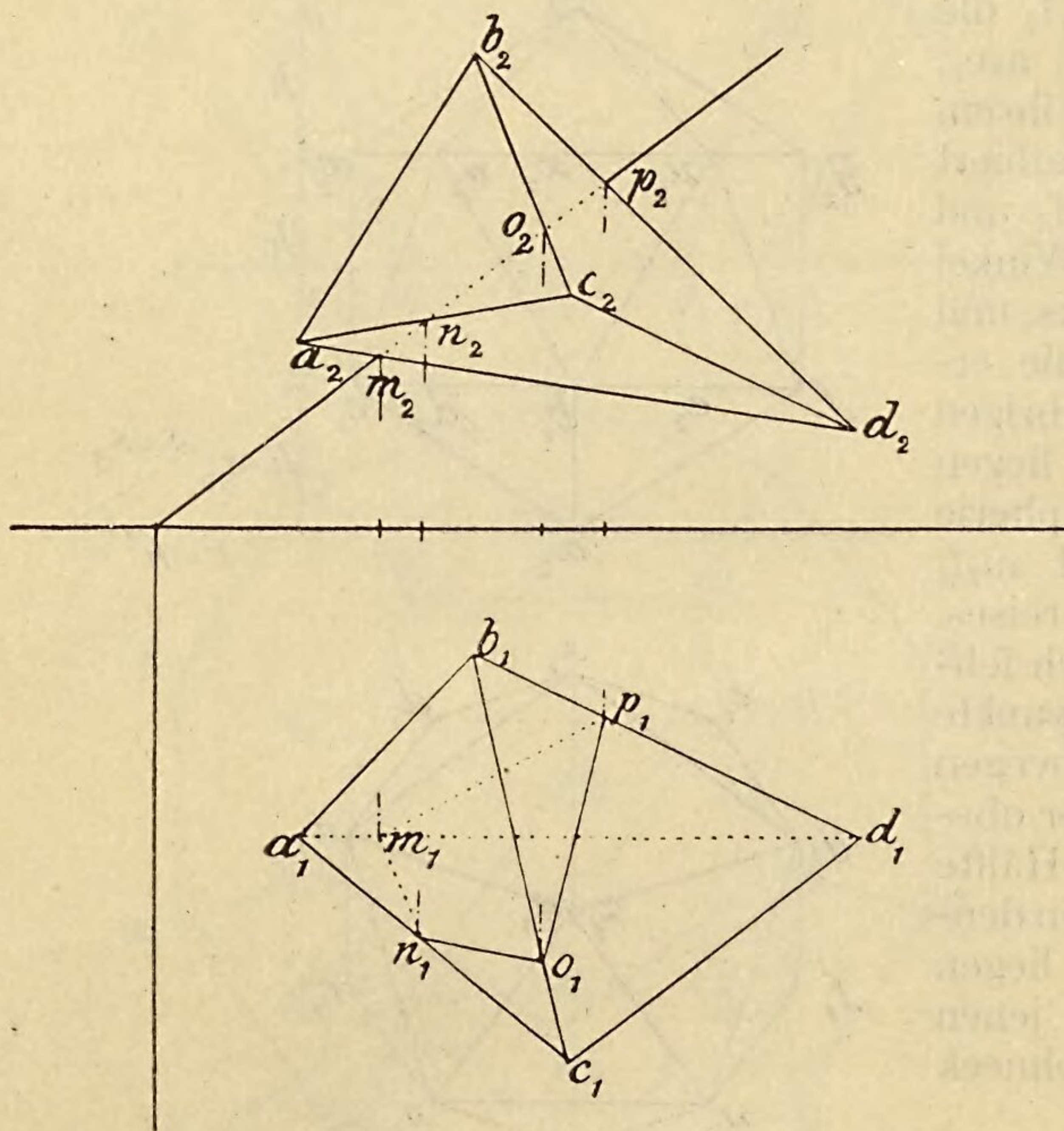


Fig. 106.

X. Kapitel.

Schnitte der Polyeder mit Ebenen.

§ 84. Die Schnittfigur eines Polyeders durch eine Ebene ist ein ebenes Polygon, dessen Seiten die Schnittlinien der getroffenen Begrenzungsflächen mit der Ebene, und dessen Ecken die Schnittpunkte der Kanten des Polyeders mit der Ebene sind. Die Seitenzahl des Schnittpolygons stimmt mit der Anzahl der getroffenen Begrenzungsflächen überein.

In dieser Erklärung ist auch schon die Art und Weise angedeutet, wie man zur Schnittfigur kommt. Man suche nämlich entweder die Schnittlinien jeder einzelnen Begrenzungsfläche mit der schneidenden Ebene und nehme von ihnen nur die durch die Kanten des Körpers begrenzten Strecken; oder man suche die Schnittpunkte der Polyederkanten mit der schneidenden Ebene und verbinde die Punkte ein und derselben Begrenzungsfläche mit einander. Schnittlinien, welche in die Erweiterungen der Seitenflächen, oder Schnittpunkte, welche in die Verlängerungen der Polyederkanten fallen, werden hiebei ausseracht gelassen.

§ 85. Am einfachsten gestaltet sich die Aufgabe, wenn die schneidende Ebene auf einer Tafel, z. B. $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht.

Aufgabe 69. Ein Tetraeder (abcd) durch eine zweite Lotebene zu schneiden.

Man erkennt hier sogleich (Fig. 106), welche Kanten von der Schnittebene getroffen werden, und hat in der zweiten Spur der Ebene auch schon den zweiten Riss $m_2n_2o_2p_2$ der Schnittfigur, deren erster $m_1n_1o_1p_1$ nur durch Herabprojizieren der Schnittpunkte in den ersten Riss der Kanten erhalten wird.

Anmerkung. Man beachte, dass die in unsichtbaren Ebenen verlaufenden Seiten des Schnittpolygons zu punktieren sind.

§ 86. Ist daher die Wahl des Tafelsystems freigestellt, so wird man dasselbe so annehmen, dass eine Tafel auf die schneidende Ebene senkrecht zu stehen kommt. Ist dagegen das System schon vorhanden und die Schnittebene schief zu den Tafeln, so kann man durch Einführung einer neuen $\mathfrak{T}_3$, welche zur gegebenen Ebene und zu einer der alten Tafeln senkrecht steht, auf den vorigen Fall zurückkommen. In der folgenden Aufgabe ist ein diesbezügliches Beispiel gelöst.

Aufgabe 70. Den Schnitt der Ebene ST mit dem Parallelepipedon abcdefgh, dessen Grundfläche abcd in $\mathfrak{T}_1$ liegt, zu finden (Fig. 107).

Wir führen eine $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ und $\perp$ Ebene ST ein, deren Schnittlinie mit $\mathfrak{T}_1$ ($\mathfrak{A}_{13}$) auf S_1 senkrecht stehen muss, suchen den dritten Riss des Parallelepipedons nach § 26 und § 28 mittelst der Punkte c und h, und den dritten Riss U_3 der Ebene mittelst der Punkte k u. m. Die U_3 schneidet den dritten Riss des Körpers in $m_3n_3p_3o_3$, welche Punkte durch Zurückprojizieren die Risse $m_1n_1o_1p_1$ und $m_2n_2o_2p_2$ der Schnittfigur liefern.

Übungsaufgabe: Man bestimme auf dieselbe Weise den Schnitt des in Fig. 103 gezeichneten regulären Oktaeders mit der allgemeinen Ebene ST.

§ 87. Ausser den Rissen der Schnittfigur wird in den meisten Fällen auch deren wahre Grösse verlangt. Um dieselbe zu gewinnen, hat man nur die Schnittebene in eine der vorhandenen Tafeln umzuklappen und dabei die Regeln des § 40 anzuwenden; auch ist nicht zu vergessen, dass die umgeklappte Figur und ihr Riss in der gleichen Tafel nach § 61 affine Figuren sind. Die Umklappung in $\mathfrak{T}_1$ ist in voriger Figur 107 vollzogen und wurde $m_4n_4o_4p_4$ als wirkliche Schnittfigur gefunden.

§ 88. Sind die geschnittenen Körper Pyramiden oder Prismen, so ergeben sich durch die nachfolgenden Betrachtungen wesentliche Vereinfachungen.

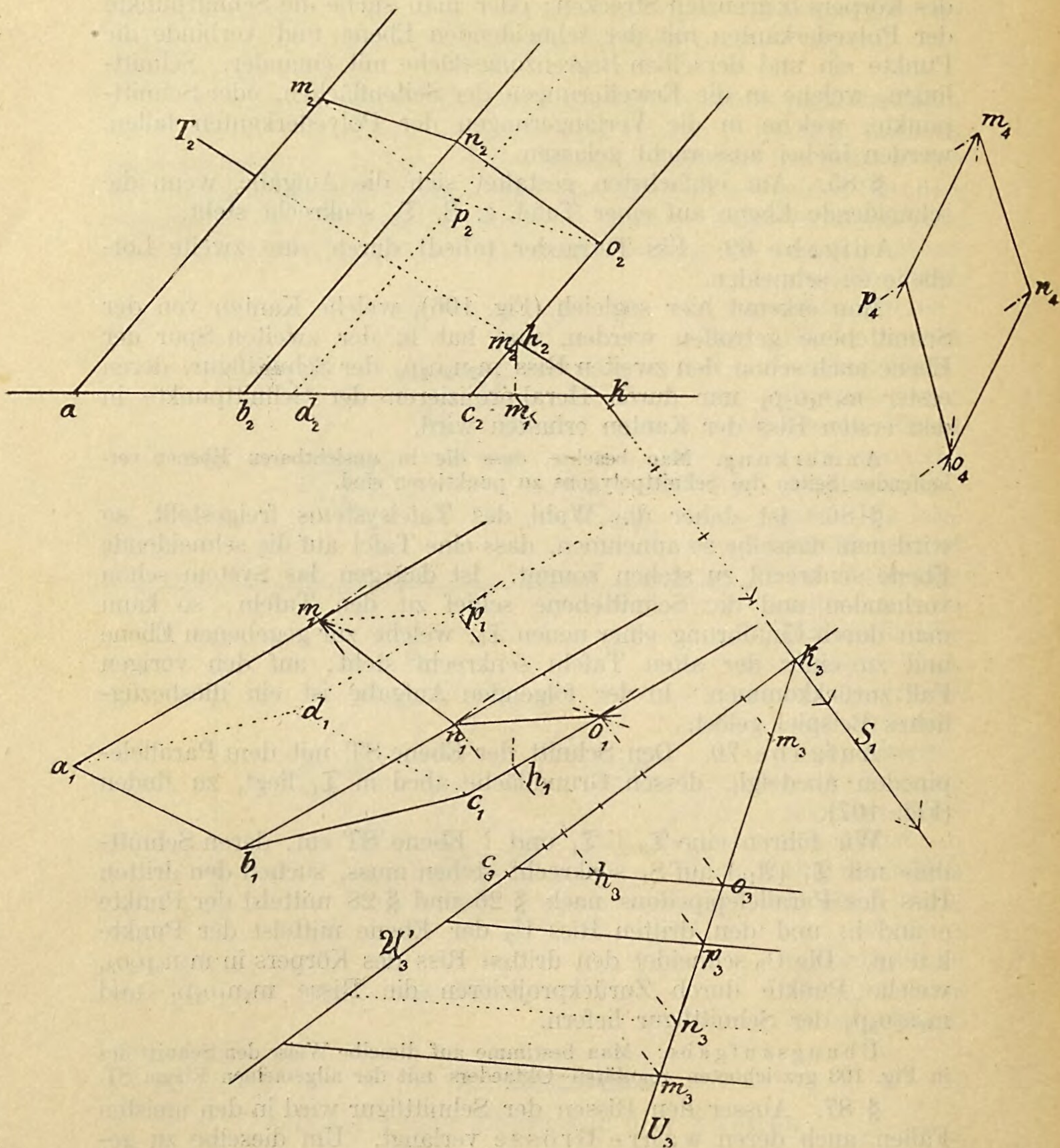


Fig. 107.

Durch den Schnitt einer Pyramide mit einer Ebene wird, wenn sämtliche Seitenkanten getroffen werden, eine abgestumpfte Pyramide erzeugt; mithin sind (§ 80) die Schnittfigur und die Grundfläche einer Pyramide räumlich kollineare Figuren, und

weil man die Grundfläche ebenfalls als Schnittpolygon der Pyramide mit der Grundebene auffassen kann, besteht der allgemeine Satz:

Irgend zwei beliebige ebene Schnitte einer Pyramide erzeugen räumlich kollineare Figuren, welche in ähnliche übergehen, wenn die schneidenden Ebenen parallel werden.

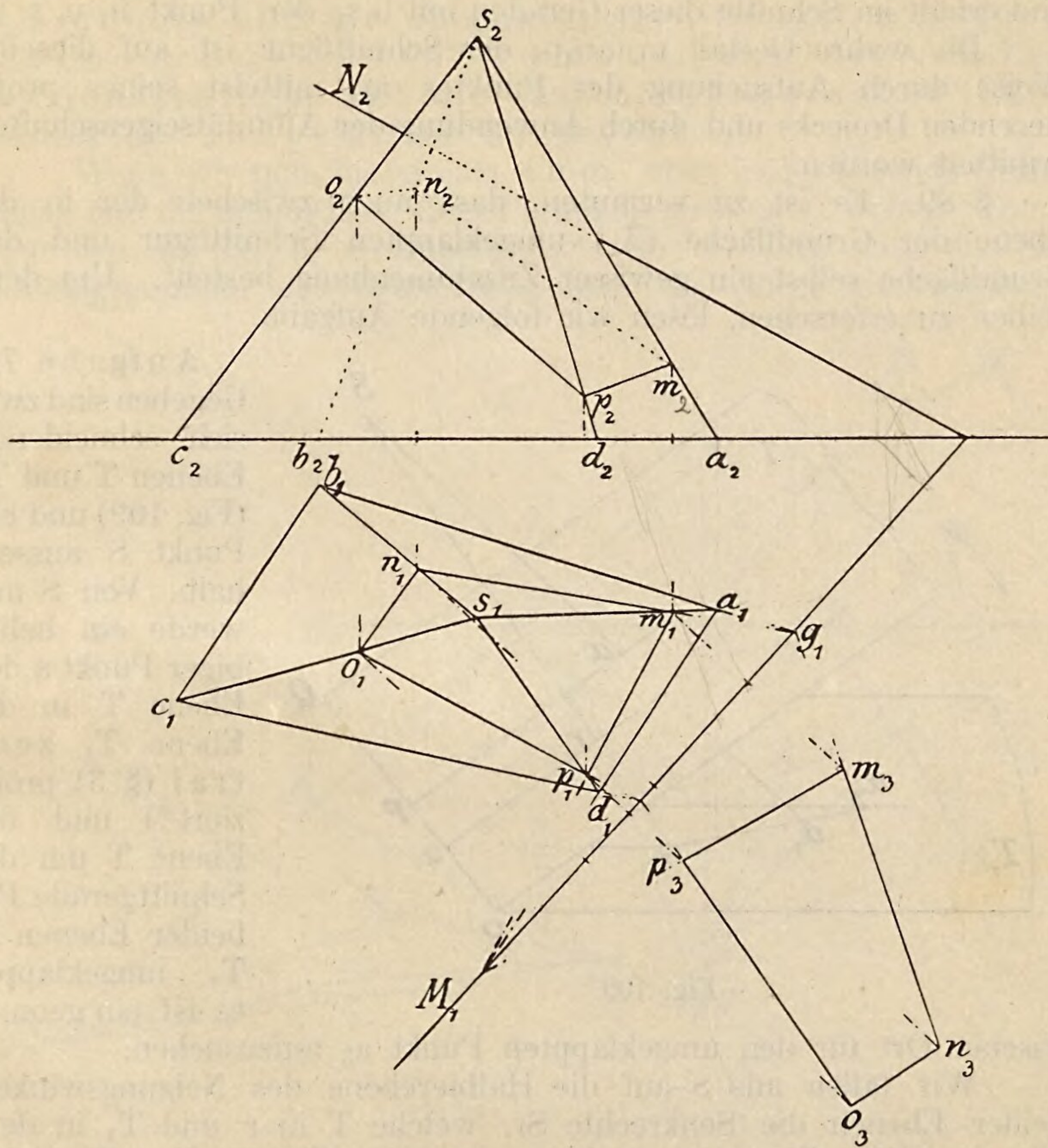


Fig. 108.

Auch die Projektionen zweier ebenen Pyramidenschnitte auf die gleiche Tafel sind kollinear (§ 80) und zwar ist der Riss der Spitze das Kollineationszentrum, der Riss der Schnittgeraden beider Ebenen die Kollineationsachse.

Die Bedeutung dieser Beziehung zwischen den Rissen von Grundfläche und Schnittfigur besteht darin, dass man nur einen Punkt der Schnittfigur auf gewöhnlichem Wege (§ 84) zu ermitteln hat, um dann alle übrigen aus den Eigenschaften kollinear Gebilde herzuleiten.

Anmerkung. Eine Ebene, welche durch die Spitze der Pyramide geht, wird, wenn sie dieselbe überhaupt schneidet, als Schnittfigur ein Dreieck liefern, dessen Grundlinie in die Grundfläche der Pyramide und dessen Spitze mit jener der Pyramide zusammenfällt.

Aufgabe 71. Den Schnitt einer vierseitigen Pyramide $abcds$, deren Grundfläche in $\mathfrak{T}_1$ fällt, mit einer Ebene MN aufzusuchen. (Fig. 108.)

Nachdem m_1 auf gewöhnlichem Wege als Schnittpunkt der Geraden as mit MN gefunden worden, verlängere man a_1b_1 bis zum Schnitte g_1 mit der Kollineationsachse M_1 , verbinde g_1 mit m_1 , und erhält im Schnitte dieser Geraden mit b_1s_1 den Punkt n_1 u. s. w.

Die wahre Gestalt $m_3n_3o_3p_3$ der Schnittfigur ist auf dieselbe Weise durch Aufsuchung des Punktes m_3 mittelst seines projizierenden Dreiecks und durch Anwendung der Affinitätseigenschaften ermittelt worden.

§ 89. Es ist zu vermuten, dass auch zwischen der in die Ebene der Grundfläche ($\mathfrak{T}_1$) umgeklappten Schnittfigur und der Grundfläche selbst ein gewisser Zusammenhang besteht. Um denselben zu erforschen, lösen wir folgende Aufgabe.

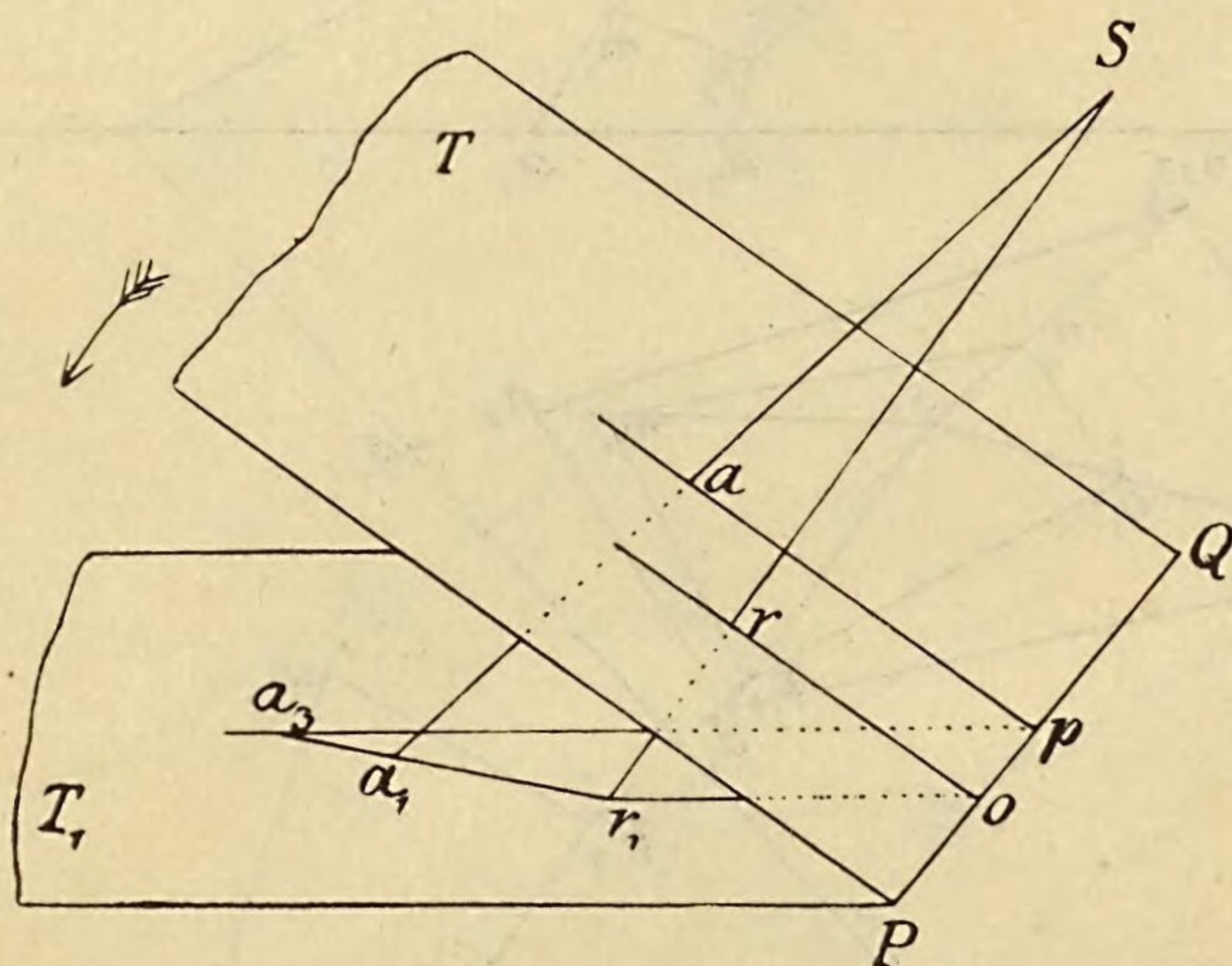


Fig. 109.

Aufgabe 72. Gegeben sind zwei sich schneidende Ebenen T und T_1 (Fig. 109) und ein Punkt S ausserhalb. Von S aus werde ein beliebiger Punkt a der Ebene T in die Ebene T_1 zentral (§ 3) projiziert*) und die Ebene T um die Schnittgerade PQ beider Ebenen in T_1 umgeklappt; es ist ein geome-

trischer Ort für den umgeklappten Punkt a_3 aufzusuchen.

Wir fällen aus S auf die Halbierebene des Neigungswinkels beider Ebenen die Senkrechte Sr , welche T in r und T_1 in dem Riss r_1 trifft. Diese Gerade ist gegen beide Ebenen T u. T_1 gleich geneigt. Zieht man nun $ro \perp PQ$ und verbindet o mit r_1 , so ist Dreieck ror_1 gleichschenkelig und $ro = r_1o$, daher trifft nach dem Umklappen der Ebene T in T_1 der Punkt r mit r_1 zusammen. Wir ziehen weiter $ap \perp PQ$ u. $pa_3 \parallel or_1$ bis zum Schnitt a_3 mit a_1r_1 , dann sind die Ebenen apa_3 u. ror_1 einander parallel und werden von der Ebene Sar in den Parallelen aa_3 u. rr_1 geschnitten. Das $\triangle apa_3$ ist daher dem $\triangle ror_1$ ähnlich und ebenfalls gleichschenkelig, so dass $ap = a_3p$ ist. Der Punkt a fällt nach der Umklappung in a_3 , in die Verbindungslinie r_1a_1 .

*) Von zwei ebenen Schnittfiguren einer Pyramide kann jede als die Zentralprojektion (aus S) der anderen angesehen werden.

Was hier für den Punkt a gezeigt wurde, gilt auch für jeden weiteren Punkt der Ebene T , welcher aus S auf T_1 projiziert wurde. Daher:

Projiziert man mehrere Punkte einer Ebene zentral auf eine andere Ebene, und klappt die erstere Ebene in die zweite um, so gehen die Verbindungslinien der Risspunkte und der umgeklappten Punkte alle durch ein und denselben Punkt, den Fusspunkt der vom Projektionszentrum auf die Halbierebene des Winkels beider Ebenen gefällten Senkrechten.

Wenn wir nun diesen Satz auf die etwa in $\mathfrak{T}_1$ liegende Grundfläche und die Schnittfigur einer Pyramide anwenden, welche Schnittfigur wir in die $\mathfrak{T}_1$ umklappen, so lehrt er uns, dass die Verbindungsgeraden der Grundflächpunkte und ihrer Umklappungen

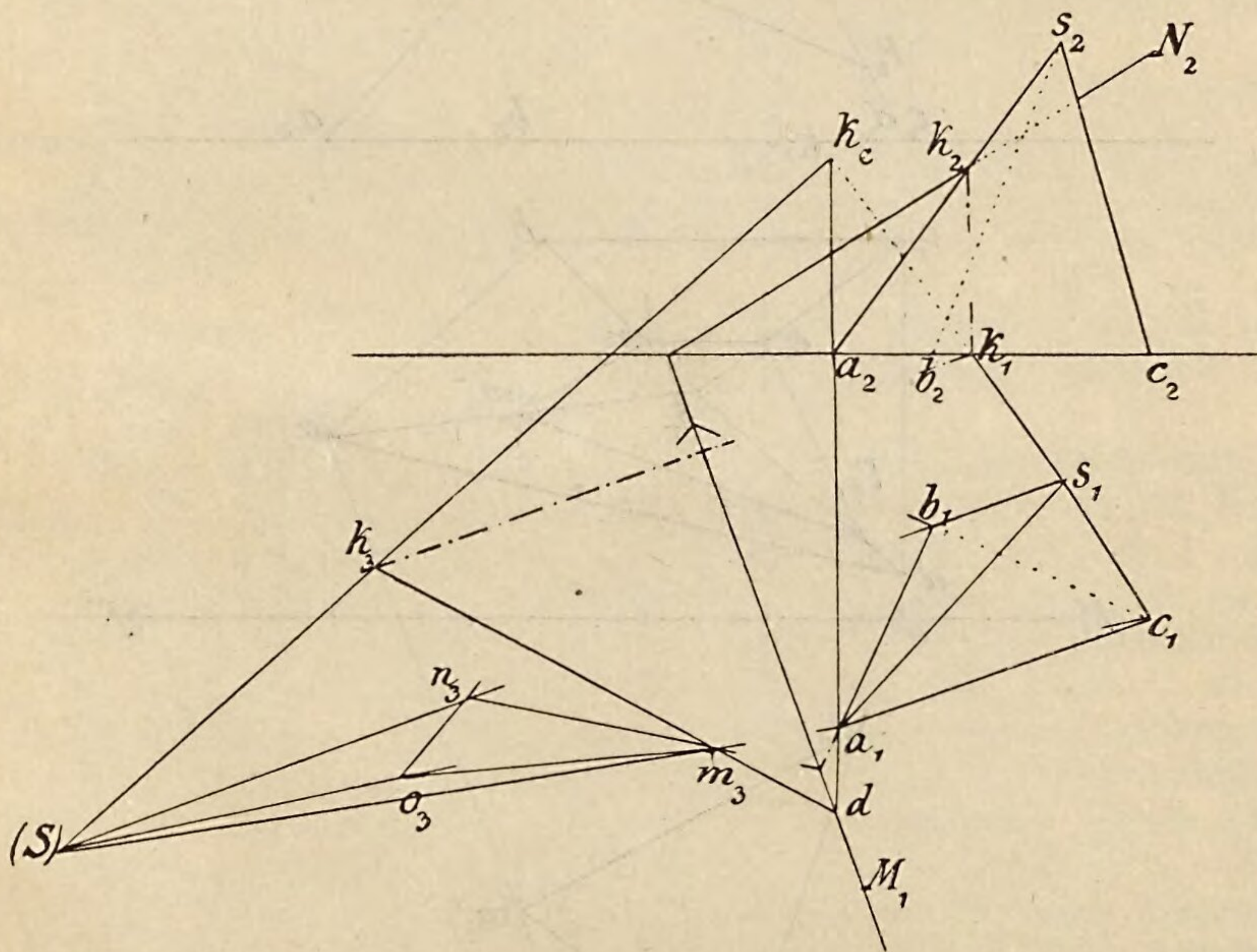


Fig. 110.

alle in einem Punkte zusammenlaufen, welcher der erste Spurpunkt des von der Pyramidenspitze auf diejenige Ebene, welche den Winkel der $\mathfrak{T}_1$ mit der schneidenden Ebene halbiert, gefällten Senkrechten ist. Weil überdies sämtliche entsprechende Gerade beider Figuren sich nur in Punkten der Schnittlinie ihrer Ebenen (hier der ersten Spur der Schnittebene) begegnen können, so erkennt man die Grundfläche und die umgeklappte Schnittfigur als kollinear. Kollineationszentrum ist der oben bezeichnete Punkt und Kollineationsachse ist die erste Spur der Schnittebene.

§ 90. Wenn die schneidende Ebene eine Lotebene ist, so lässt sich das Kollineationszentrum für die Umklappung leicht

finden, weil in diesem Falle der Winkel der Schnittebene mit $\mathcal{T}$ unmittelbar vorhanden ist. Für eine beliebige Ebene kann man zur Aufsuchung des Kollineationszentrums die Umklappung eines beliebigen, möglichst einfach gelegenen Punktes der Schnittebene benutzen.

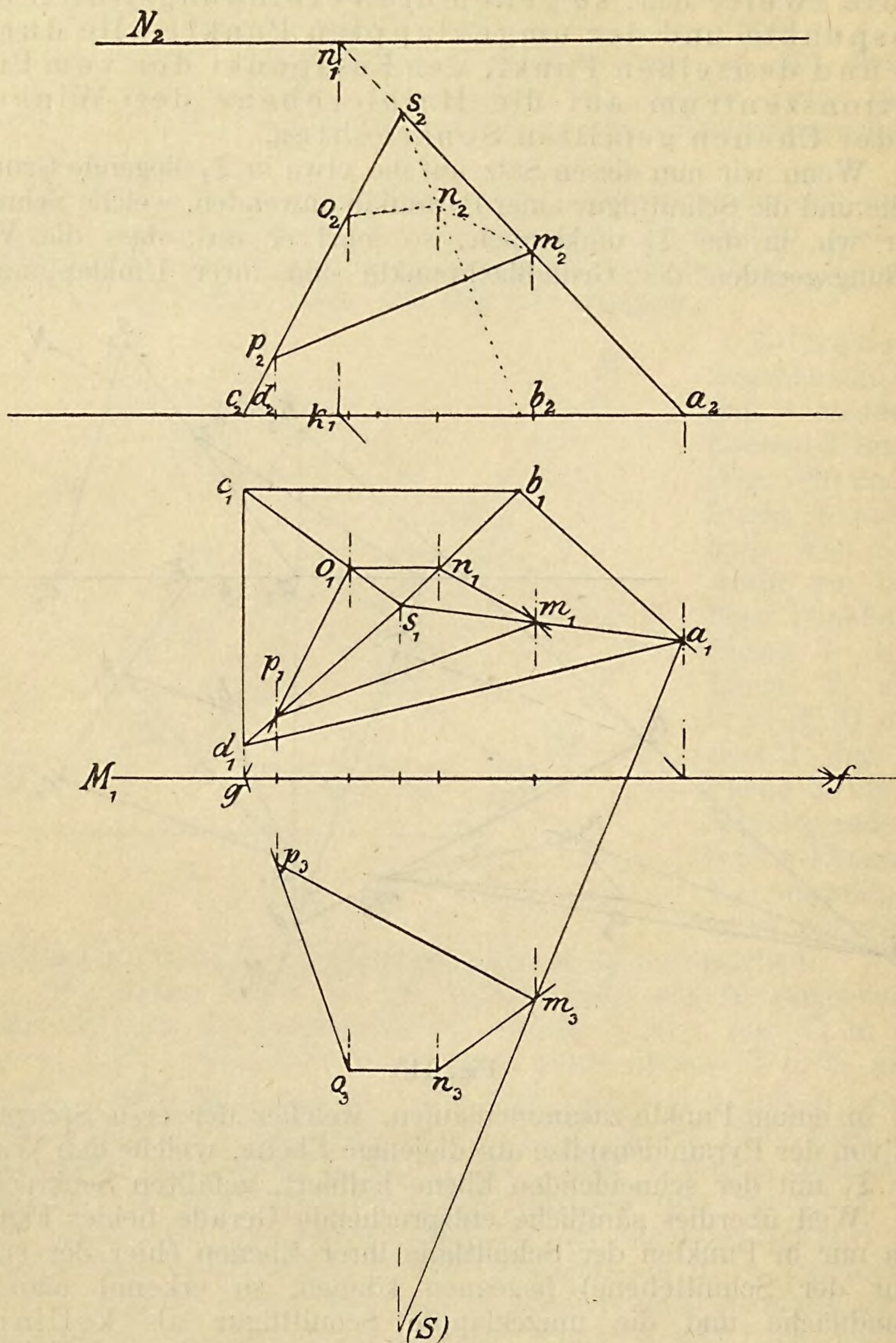


Fig. 111.

Aufgabe 73. Die dreiseitige Pyramide $abcs$ (Fig. 110) sei durch die allgemeine Ebene MN zu schneiden und die Schnittfigur in ihrer wahren Gestalt anzugeben, ohne vorher deren Risse aufzusuchen.

Da die erste Spur der den Winkel der MN mit $\mathfrak{T}_1$ halbierenden Ebene mit M_1 zusammenfällt, so ist die Senkrechte aus s_1 auf M_1 geometrischer Ort für das Kollinationszentrum der Umklappung. Hierauf nehme man in MN den Punkt k_2 der zweiten Spur beliebig und klappe ihn nach k_3 um: die Zentralprojektion von k ist die erste Spur des projizierenden Strahles sk , nämlich k_c , $k_c k_3$ ist der umgelegte Strahl, welcher den vorhin gefundenen geometrischen Ort in (S), dem Kollinationszentrum, schneidet. Mit Hilfe des Zentrums, der Achse M_1 , und der entsprechenden Punkte k_c u. k_3 lassen sich die umgelegten Schnittpunkte m_3, n_3, o_3 ohne Anstand finden. Man verbinde k_c mit a_1 und verlängere diese Gerade bis zum Schnitt d mit M_1 , die Gerade dk_3 schneidet dann die a_1 (S) in dem Punkte m_3 u. s. w. Bei der Konstruktion weiterer Punkte ist es nicht mehr nötig, gerade die Punkte k_c u. k_3 zu benützen, statt ihrer kann vielmehr jedes Paar bereits gefundener entsprechenden Punkte verwendet werden.

Anmerkungen: 1) Wie man aus der wahren Schnittfigur nachträglich deren Risse findet, ist leicht einzusehen.

2) In der Lehre von der Zentralprojektion ist (S) der um die Fluchtlinie umgeklappte Punkt s ; die Fluchtlinie ist die Schnittlinie der durch s parallel zur schneidenden Ebene geführten Ebene mit jener Ebene, in welche umgeklappt wird.

Aufgabe 74. Eine gerade Pyramide hat zur Grundfläche ein gegebenes Viereck, welches mit $\mathfrak{T}_1$ zusammenfällt; dieselbe ist durch eine „gelehnte“ Ebene zu schneiden.

Es sei (Fig. 111) $abcds$ die Pyramide, $M_1 N_2$ die schneidende Ebene. Man suche den Schnittpunkt $m_1 m_2$ der Geraden as mit MN nach § 30, verlängere $a_1 b_1$ bis zum Schnitt f in M_1 , verbinde f mit m_1 , welche Linie die $b_1 s_1$ im Punkte n_1 trifft. Für $b_1 c_1$ und $n_1 o_1$ liegen die Schnittpunkte mit M_1 im Unendlichen, $n_1 o_1$ läuft daher der $b_1 c_1$ parallel. $c_1 d_1$ bis g in M_1 verlängert und g mit o_1 verbunden, liefert p_1 . Die Umlegung m_3 bestimme man auf gewöhnlichem Wege mittelst der dritten Ordinate, $a_1 m_3$ bis zum Schnitt mit s_1 (S) $\perp M_1$ verlängert, gibt (S). Im Schnittpunkte von b_1 (S) und fm_3 findet man n_3 , die $n_3 o_3 \parallel M_1$ schneidet c_1 (S) in o_3 u. s. w. Statt der Linien b_1 (S) oder fm_3 hätte man auch das dritte Achsenlot $m_1 m_3$ benützen können und ergeben sich daraus leicht erkennbare Kontrollen für richtige Zeichnung. Um (S) vor den Rissen zu erhalten, benütze man den beliebigen Punkt m der MN, klappe ihn nach m_3 , suche die erste Spur a_1 des Strahles sm , und ziehe $a_1 m_3$ bis zum Schnitt (S) mit der Geraden s_1 (S) $\perp M_1$.

Übungsaufgaben: 1) Eine Pyramide so zu schneiden, dass eine ihrer Seitenkanten senkrecht halbiert wird.

2) Eine sechsseitige Pyramide so zu schneiden, dass drei ihrer Seitenkanten in bestimmten Abständen von der Spitze getroffen werden.

3) Eine vierseitige Pyramide durch eine Ebene zu schneiden, welche durch einen gegebenen Punkt geht und vorgeschriebene Neigungswinkel zu den Tafeln hat.

4) Eine gegebene Pyramide durch die Halbierebenen des Tafelsystems zu schneiden.

5) Eine gerade Pyramide, welche mit ihrer Spitze in $\mathfrak{T}_1$ aufrucht, durch eine allgemeine Ebene zu schneiden.

Will man die wahre Grösse ohne Hilfe der Risse, so klappe man einen beliebigen Punkt k der schneidenden Ebene nach k_3 um, suche die erste Spur k_1' des projizierenden Strahles, welcher durch k parallel den Seitenkanten geht*), um in der Geraden $k_1'k_3$ die Affinitätsrichtung zu erhalten, mit Hilfe deren man leicht die Punkte $m_3n_3o_3p_3$ finden kann.

Übungsaufgaben: 1) Ein gegebenes fünfseitiges Prisma durch eine allgemeine Ebene zu schneiden.

2) Ein Parallelepipedon, dessen Grundfläche in einer zu beiden Tafeln unter bestimmten Winkeln geneigten Ebene liegt, durch eine der Grundfläche parallele Ebene zu schneiden.

3) Ein gegebenes vollständiges Prisma (mit Grund- und Deckfläche) durch eine Ebene zu schneiden, welche den Seitenkanten parallel läuft und eine der Grundkanten halbiert.

4) Das Netz eines schiefen Prisma's mit Hilfe des die Seitenkanten senkrecht halbierenden Ebenenschnittes zu zeichnen.

5) Einen in Parallelstellung zu den 3 rechtwinkligen Projektionsebenen gezeichneten Würfel durch eine allgemeine Ebene zu schneiden.

6) Einen Würfel, dessen Diagonale auf $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, durch eine zweite Lotebene zu schneiden, welche die Diagonale halbiert.

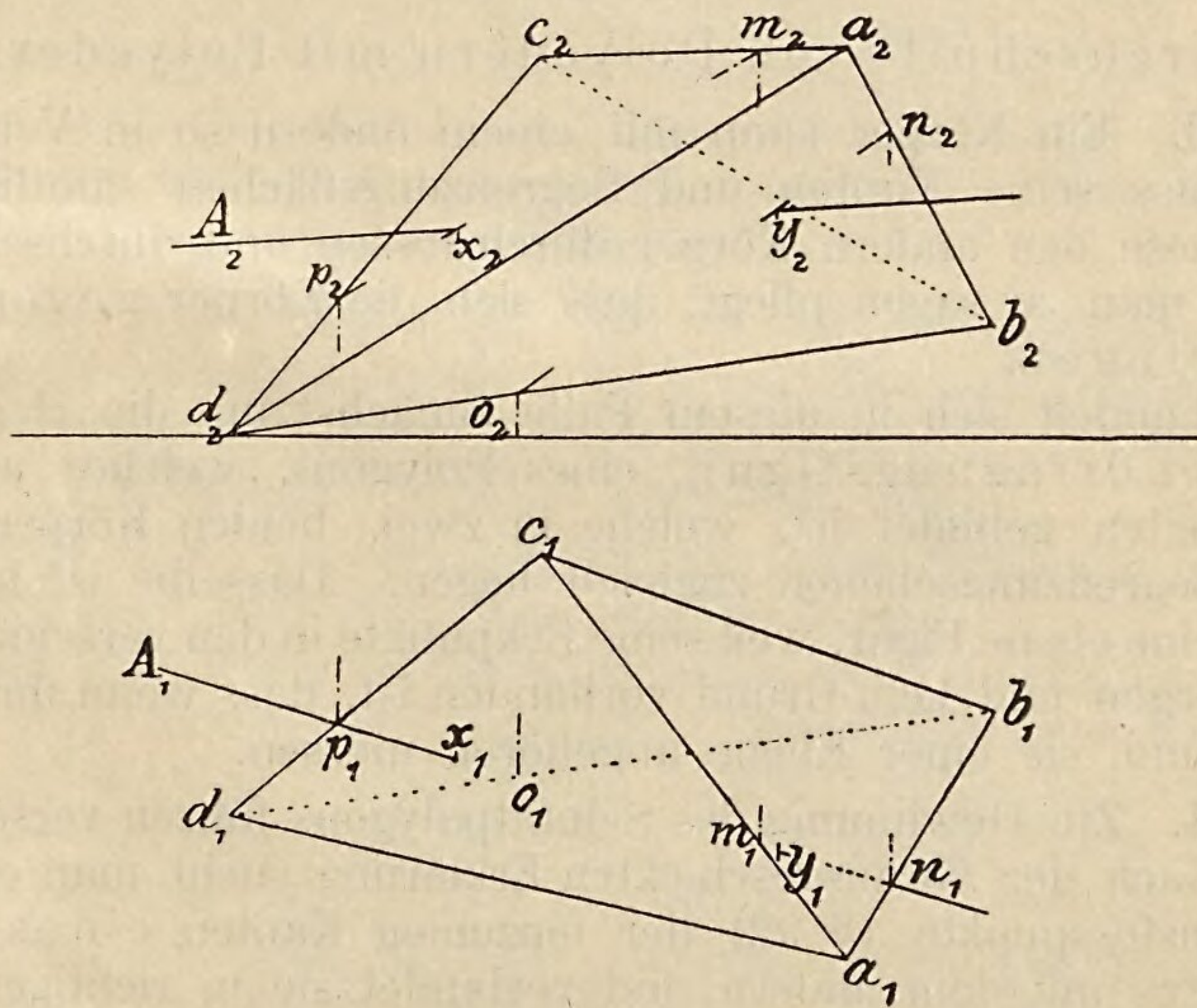


Fig. 113.

§ 92. Wenn es sich darum handelt, die Durchdringungspunkte einer Geraden und eines Polyeders zu finden, so lege man durch die Gerade eine ihrer projizierenden Ebenen und suche deren Schnittfigur mit dem Polyeder. Die Punkte, welche die Schnittfigur mit der Geraden gemeinsam hat, sind die gesuchten.

Aufgabe 76. Die Durchdringungspunkte einer Geraden mit einem Tetraeder zu finden.

Man lege durch die Gerade A (Fig. 113) die erste Lotebene

*) Von zwei Schnittfiguren eines Prisma's kann jede als die schiefe Parallelprojektion der andern angesehen werden, siehe Anmerk. zu § 89.

A_1 , ihre Schnittfigur mit dem Tetraeder ist das Viereck mnp ; die Gerade A_2 schneidet $m_2n_2o_2p_2$ in x_2 u. y_2 , den zweiten Rissen der gesuchten Durchdringungspunkte x u. y .

Für die Zeichnung ist zu bemerken, dass das Stück xy der Geraden A , welches innerhalb des Körpers verläuft, gar nicht gezogen wird. Der Punkt x ist in Bezug auf beide Tafeln sichtbar, y bloß für die $\mathcal{T}_2$, daher sind die Teile vom Umfang bis x , sowie der Teil von y_2 bis zum Umfang auszuziehen, jener von y_1 bis n_1 zu punktieren.

Übungsaufgabe: Die Durchdringungspunkte einer Geraden mit einem regulären Dodekaeder oder Ikosaeder zu suchen.

Anmerkung: Sind die durchdrungenen Körper Pyramiden, so kann man die schneidende Hilfsebene auch durch die Gerade und die Spitze des Körpers legen, denn eine solche Ebene schneidet (§ 88 Anm.) die Pyramide in einem leicht zu konstruierenden Dreieck. Ebenso kann man bei Prismen die Hilfsebene durch die Gerade parallel den Seitenkanten des Prisma's führen, der Schnitt der Hilfsebene ist dann ein Parallelogramm.

XI. Kapitel.

Durchschnitt von Polyedern mit Polyedern.

§ 93. Ein Körper kann mit einem andern so in Verbindung treten, dass seine Kanten und Begrenzungsflächen sämtlich oder nur teilweise den andern Körper durchstossen und durchschneiden, oder wie man zu sagen pflegt, dass sich die Körper gegenseitig durchdringen.

Es handelt sich in diesem Falle zunächst um die Herstellung der Durchdrungsfigur, eines Polygons, welches aus denjenigen Seiten gebildet ist, welche in zwei, beiden Körpern angehörigen Begrenzungsebenen zugleich liegen. Dasselbe ist im allgemeinen keine ebene Figur, weil seine Eckpunkte in den verschiedensten Ebenen liegen und kein Grund vorhanden ist, dass wenn ihrer mehr als drei sind, sie einer Ebene angehören müssen.

§ 94. Zur Gewinnung des Schnittpolygons führen verschiedene Wege. Nach der vorausgeschickten Erklärung sucht man entweder die Durchstosspunkte (§ 92) der einzelnen Kanten eines jeden Polyeders mit dem andern und verbindet sie in richtiger Folge; oder man sucht die Schnittlinien (§ 84 u. f.) sämtlicher Begrenzungsebenen eines jeden Körpers mit dem andern, welche in ihrer Begrenzung durch die Kanten der Polyeder die gewünschten Polygonseiten vorstellen. Dabei können nur jene Durchstosspunkte oder Schnittlinien in Betracht kommen, welche in die wirklichen Oberflächen beider Körper und nicht etwa in deren Verlängerungen fallen. Die Verbindung der gefundenen Durchstosspunkte der Kanten darf nur in der Weise geschehen, dass die dadurch gebildeten Polygonsseiten in Ebenen liegen, wovon die eine den einen, die andere den zweiten Körper begrenzt oder es dürfen nur solche Punkte verbunden werden, welche in ein und derselben Seitenebene sowohl des einen als des andern Polyeders liegen.

Eine dritte Methode zur Herstellung der Durchdringungsfigur besteht darin, dass man beide Körper durch passend gewählte Hilfsebenen nach ebenen Vielecken schneidet, deren gemeinsame Punkte auch beiden Körpern gemeinschaftlich sind. Diese Methode gewährt namentlich bei der Durchdringung von Pyramiden und Prismen grosse Vorteile, wie die späteren Beispiele zeigen werden.

Von den Seiten des Durchdringungspolygons werden öfter einzelne durch die Begrenzungsebenen des einen oder anderen Polyeders verdeckt werden oder in der Zeichnung zu punktieren sein, während andere ausziehen sind. Eine Polygonsseite ist sichtbar, wenn ihre beiden Endpunkte sichtbar sind, sie ist unsichtbar, wenn auch nur der eine Endpunkt unsichtbar ist.

§ 95. Zwei Körper bilden eine wirkliche (volle) Durchdringung, wenn sämtliche Seitenkanten des einen Körpers durch den andern hindurch gehen, so dass dieser einen Teil des ersteren vollständig umschliesst. Das Durchdringungspolygon besteht in diesem Falle aus zwei getrennten Teilen, der sogenannten Eintritts- und der Austrittsfigur.

Zwei Körper schneiden sich gegenseitig aus, wenn bloss ein Teil der Seitenkanten den andern Körper durchdringt, während die übrigen an demselben vorbeigehen. Die Ausschnittsfigur ist nur ein einziges Polygon.

§ 96. Wir beschränken uns in den nachfolgenden Aufgaben bloss auf die Durchdringungen von Pyramiden und Prismen, glauben aber bemerken zu sollen, dass die in Aufgabe 77 befolgte Methode sich auch auf andere Polyeder anwenden lässt.

Aufgabe 77. Die Durchdringung zweier allgemein gelegenen Tetraeder $abcd$ und $efgh$ (Fig. 114) zu finden.

Man lege durch bc die zweite Lotebene, welche das Tetraeder $efgh$ in dem Dreieck mno schneidet; dieses hinwieder wird von bc in den Punkten 1 u. 2 getroffen, welche beiden Körpern zugleich oder dem Schnittpolygon angehören. Auf gleiche Weise findet man die Durchgangspunkte 3 u. 4 der Kante ad , 5 u. 6 der Kante ac , 7 u. 8 der Kante bd mit dem Tetraeder $efgh$, sodann die Durchstossunkte 9 u. 10 der Kante eg , 11 u. 12 der Kante fh mit dem Tetraeder $abcd$, wobei man bald erste, bald zweite Lotebenen durch die betreffenden Kanten legen wird, um die Schnittfiguren möglichst einfach und sicher zu erhalten. Die übrigen Kanten liefern keine Schnittpunkte.

Nachdem man ein Paar Durchdringungspunkte gefunden, notiere man sogleich seitwärts in einer Tabelle die Ebenen, in welchen die gefundenen Punkte liegen und bemerke zugleich, ob die Punkte sichtbar sind oder nicht. z. B. Punkt 1 liegt in der Kante bc , mithin in den Ebenen abc , bcd des ersten Tetraeders, dann in der Ebene fgh des zweiten. bc ist zwar für beide Tafeln sichtbar, aber die Ebene fgh nur für die zweite Tafel. Der Punkt 1 ist daher im ersten Riss unsichtbar (....), im zweiten sichtbar (—),

u. s. f. Die Tabelle für die 12 Durchdringungspunkte gestaltet sich demnach folgendermassen:

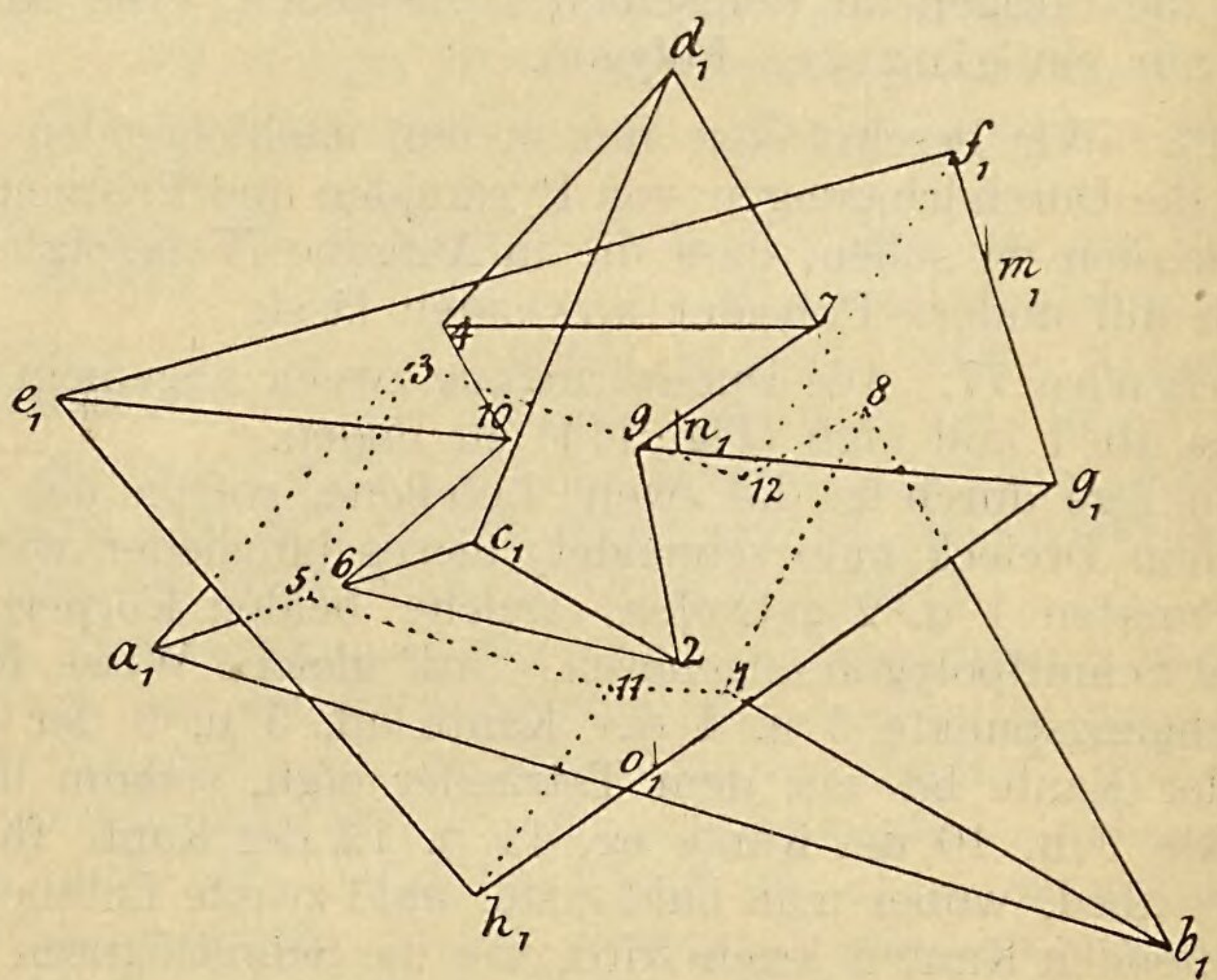
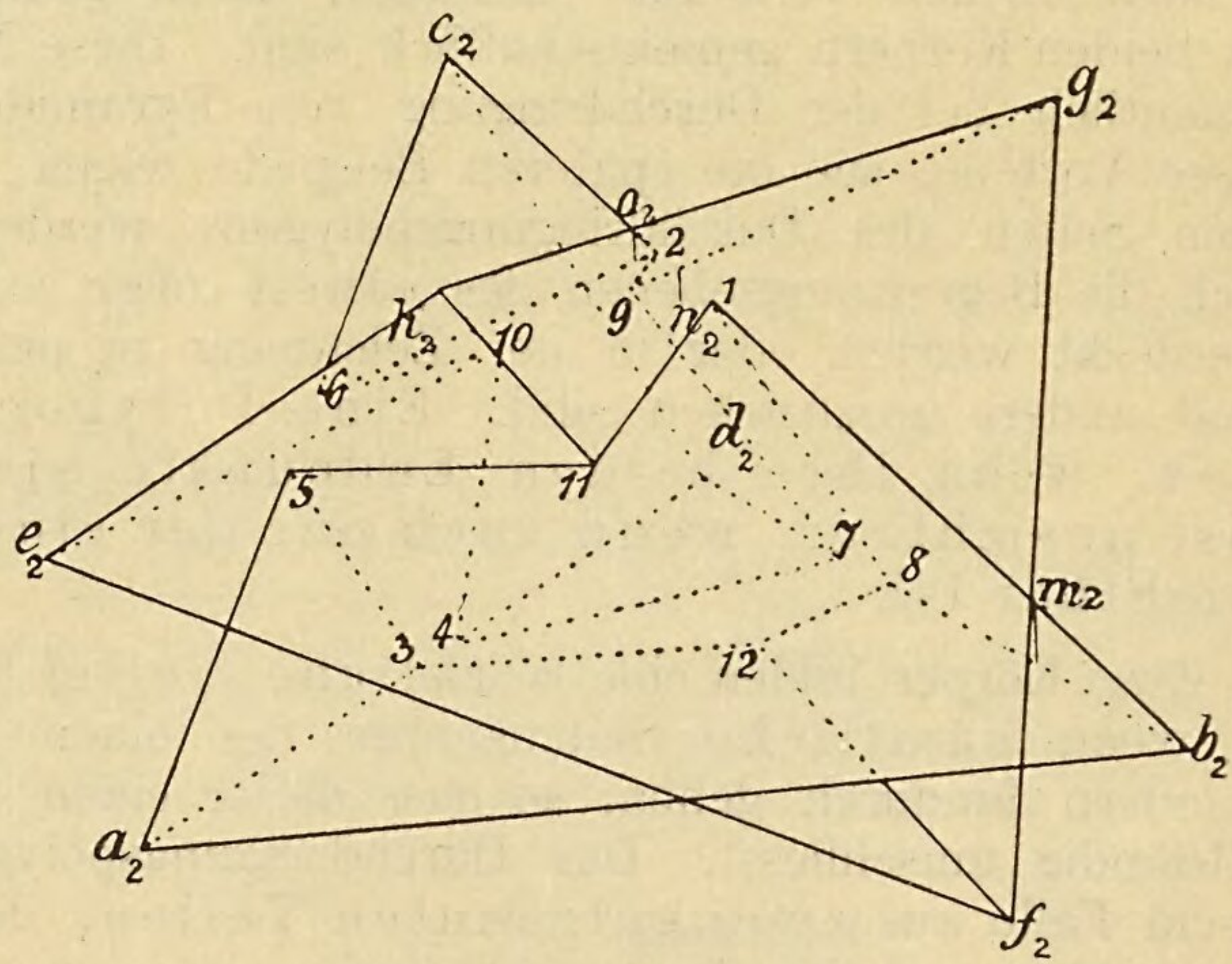


Fig. 114.

P. <u>1</u>	Eb. abc, bcd, fgh,	P. <u>7</u>	Eb. abd, bcd, efg,
<u>2</u>	„ abc, bcd, egh,	<u>8</u>	„ abd, bcd, fgh,
<u>3</u>	„ abd, acd, efh,	<u>9</u>	„ efg, egh, bcd,
<u>4</u>	„ abd, acd, efg,	<u>10</u>	„ efg, egh, acd,
<u>5</u>	„ abc, acd, efh,	<u>11</u>	„ efh, fgh, abc,
<u>6</u>	„ abc, acd, egh,	<u>12</u>	„ efh, fgh, abd.

Um nun die Punkte in richtiger Folge zu verbinden, suche man die in gleichen Ebenen liegenden (§ 94) durch folgende Be-

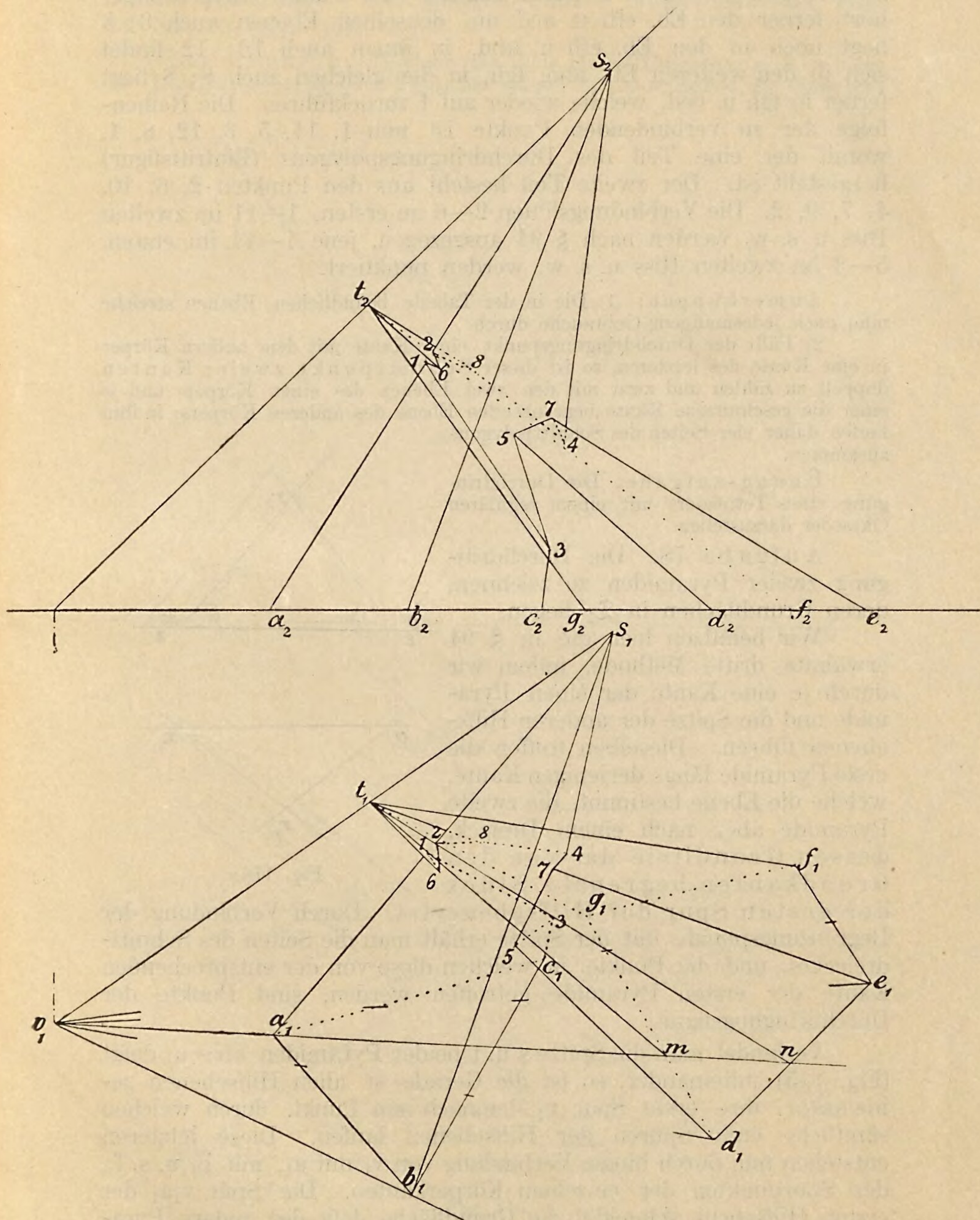


Fig. 115.

trachtung: Punkt 1 liegt in den Ebenen abc , fgh , in denselben Ebenen auch der Punkt 11; dieser Punkt ist auch noch in den Ebenen abc u. efh , in welchen zugleich der Punkt 5 liegt; 5 gehört ferner den Eb. efh u. acd an, denselben Ebenen auch 3; 3 liegt noch in den Eb. efh u. abd , in ihnen auch 12; 12 findet sich in den weiteren Eb. abd , fgh , in den gleichen auch 8; 8 liegt ferner in fgh u. bcd , welche wieder auf 1 zurückführen. Die Reihenfolge der zu verbindenden Punkte ist nun 1, 11, 5, 3, 12, 8, 1, womit der eine Teil des Durchdringungspolygons (Eintrittsfigur) hergestellt ist. Der zweite Teil besteht aus den Punkten 2, 6, 10, 4, 7, 9, 2. Die Verbindungslinien 2—6 im ersten, 1—11 im zweiten Riss u. s. w. werden nach § 94 ausgezogen, jene 1—11 im ersten, 5—3 im zweiten Riss u. s. w. werden punktiert.

Anmerkungen: 1) Die in der Tabelle befindlichen Ebenen streiche man nach jedesmaligem Gebrauche durch.

2) Fällt der Durchdringungspunkt einer Kante mit dem andern Körper in eine Kante des letzteren, so ist dieser Schnittpunkt zweier Kanten doppelt zu zählen und zwar mit den zwei Ebenen des einen Körpers und je einer die geschnittene Kante begrenzenden Ebene des anderen Körpers; in ihm laufen daher vier Seiten des Schnittpolygons zusammen.

Übungsaufgabe: Die Durchdringung eines Tetraeders mit einem regulären Oktaeder darzustellen.

Aufgabe 78. Die Durchdringung zweier Pyramiden zu zeichnen, deren Grundflächen in $\mathfrak{T}_1$ liegen.

Wir benutzen hier die in § 94 erwähnte dritte Methode, indem wir durch je eine Kante der einen Pyramide und die Spitze der anderen Hilfsebenen führen. Dieselben treffen die erste Pyramide längs derjenigen Kante, welche die Ebene bestimmt, die zweite Pyramide aber nach einem Dreieck, dessen Grundlinie das von den Grundkanten begrenzte Stück der ersten Spur der Hilfsebene ist. Durch Verbindung der Begrenzungspunkte mit der Spitze erhält man die Seiten des Schnittdreieckes, und die Punkte, in welchen diese von der entsprechenden Kante der ersten Pyramide getroffen werden, sind Punkte der Durchdringungsfigur.

Verbindet man die Spitze s u. t beider Pyramiden $abcs$ u. $defgt$ (Fig. 115) miteinander, so ist die Gerade st allen Hilfsebenen gemeinsam, ihre erste Spur v_1 demnach ein Punkt, durch welchen sämtliche erste Spuren der Hilfsebenen laufen. Diese letzteren entstehen nun durch bloße Verbindung von v_1 mit a_1 , mit b_1 u. s. f., den Spurpunkten der einzelnen Körperkanten. Die Spur v_1a_1 der ersten Hilfsebene schneidet die Grundfläche $defg$ der andern Pyramide in der Geraden mn , der Grundlinie des Dreieckes tmn , nach

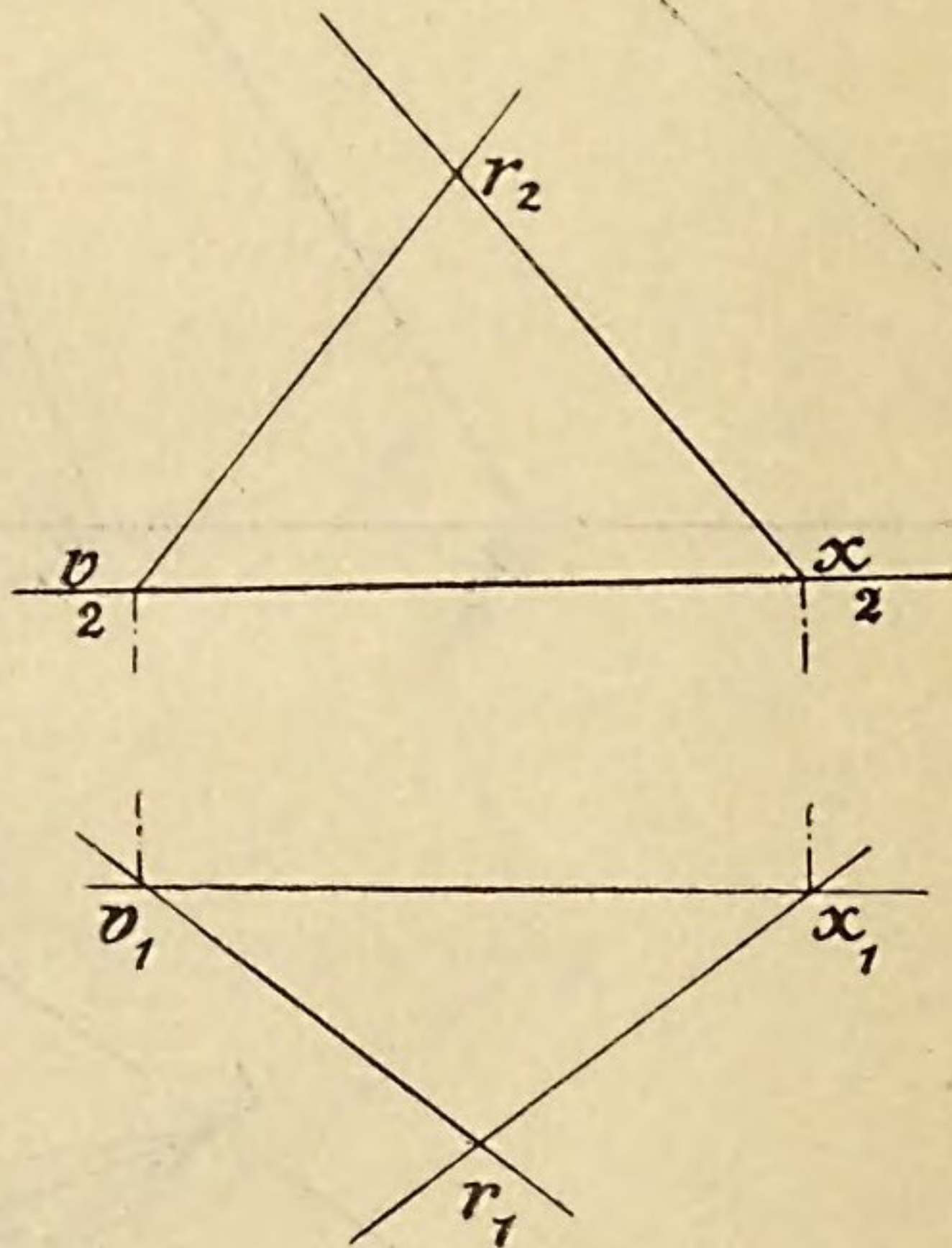


Fig. 116a.

welchem die Ebene α st die zweite Pyramide schneidet. Die Gerade α s endlich trifft dieses Dreieck in den Punkten 1 u. 2 der Durchdringungsfigur. Die übrigen Punkte findet man mit Hilfe der Spuren v_1c_1 , v_1d_1 , v_1e_1 .

Bemerkungen: 1) Wenn die Spur einer Hilfsebene, z. B. v_1b_1 , an der Grundfläche der anderen Pyramide vorbeigeht, so schneidet die Hilfsebene

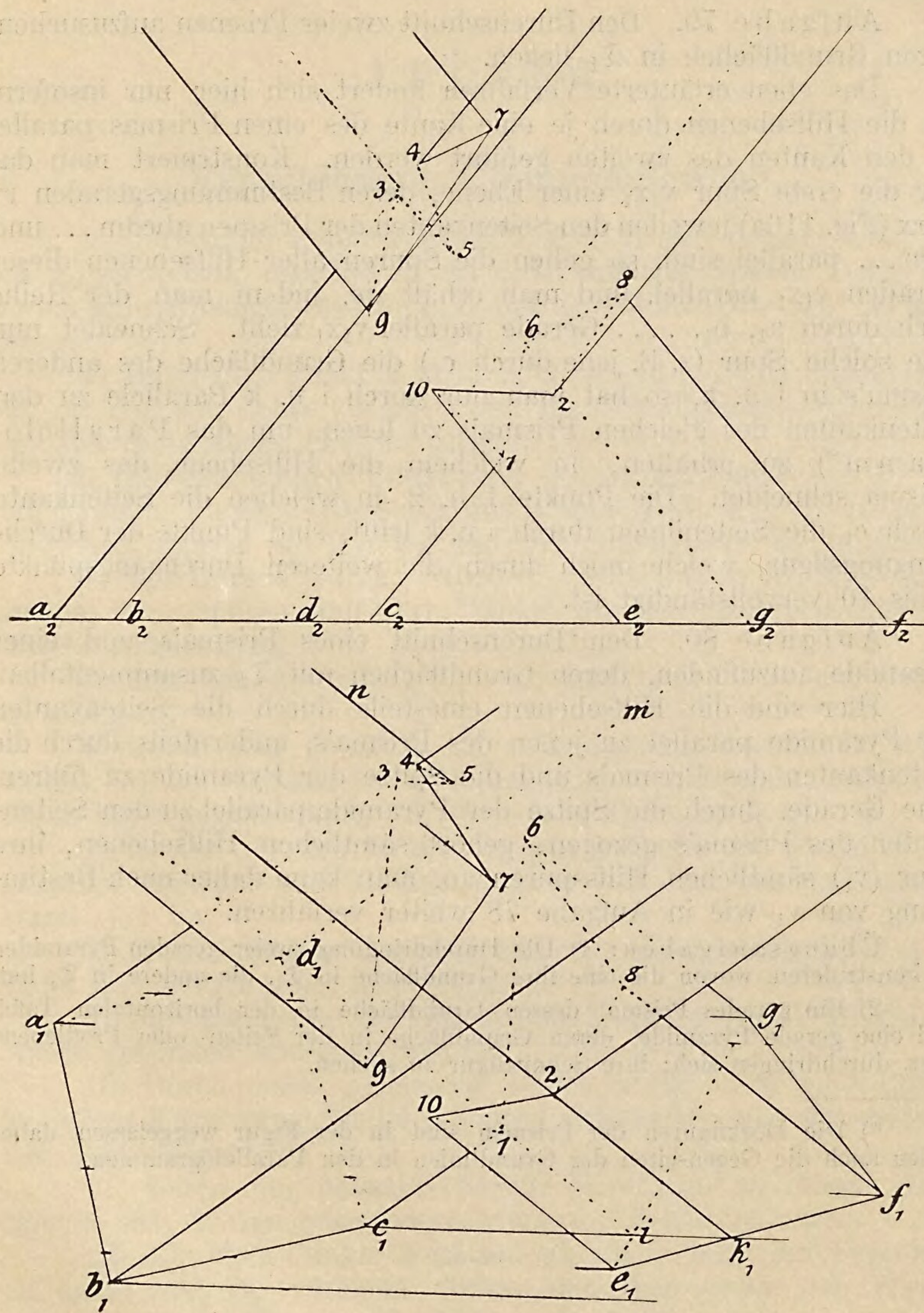


Fig. 116.

diese Pyramide gar nicht (hat nur die Spitze mit ihr gemeinsam), oder die betreffende Kante b s liefert keinen Durchgangspunkt.

2) Wenn die Spur einer Hilfsebene die Grundfläche in einem Eckpunkt trifft, so erhält man in dem Schnittpunkt der beiden Pyramidenkanten den in Aufg. 77 Anmerk. 2 genannten Doppelpunkt.

3) Schliessen die äussersten Spuren zweier einer Pyramide angehörigen Hilfsebenen die Grundfläche der anderen Pyramide gänzlich ein, so dringt letztere durch die erstere hindurch und es ist volle Durchdringung vorhanden; im anderen Falle (Fig. 115), in welchem von den äussersten Spuren eine die Grundfläche des zweiten Körpers trifft (v_1c_1), die andere (v_1b_1) daran vorbeigeht, findet ein blosses Ausschneiden beider Körper statt.

Aufgabe 79. Den Durchschnitt zweier Prismen aufzusuchen, deren Grundflächen in $\mathfrak{T}_1$ liegen.

Das eben erläuterte Verfahren ändert sich hier nur insofern, als die Hilfsebenen durch je eine Kante des einen Prismas parallel zu den Kanten des zweiten geführt werden. Konstruiert man daher die erste Spur v_1x_1 einer Ebene, deren Bestimmungsgeraden rv u. rx (Fig. 116a) jeweilen den Seitenkanten der Prismen $abcdm \dots$ und $efgn \dots$ parallel sind, so gehen die Spuren aller Hilfsebenen dieser Geraden v_1x_1 parallel, und man erhält sie, indem man der Reihe nach durch $a_1, b_1, \dots$ Gerade parallel v_1x_1 zieht. Schneidet nun eine solche Spur (z. B. jene durch c_1) die Grundfläche des anderen Prisma's in i u. k , so hat man nur durch i u. k Parallele zu den Seitenkanten des gleichen Prisma's zu legen, um das Parallelogramm*) zu erhalten, in welchem die Hilfsebene das zweite Prisma schneidet. Die Punkte 1 u. 2, in welchen die Seitenkante durch c_1 die Seitenlinien durch i u. k trifft, sind Punkte der Durchdringungsfigur, welche noch durch die weiteren Durchgangspunkte 3 bis 10 vervollständigt ist.

Aufgabe 80. Den Durchschnitt eines Prisma's und einer Pyramide aufzufinden, deren Grundflächen mit $\mathfrak{T}_1$ zusammenfallen.

Hier sind die Hilfsebenen einesteils durch die Seitenkanten der Pyramide parallel zu jenen des Prisma's, andernteils durch die Seitenkanten des Prisma's und die Spitze der Pyramide zu führen. Eine Gerade, durch die Spitze der Pyramide parallel zu den Seitenkanten des Prisma's gezogen, gehört sämtlichen Hilfsebenen, ihre Spur (v_1) sämtlichen Hilfsspuren an, man kann daher nach Bestimmung von v_1 wie in Aufgabe 78 weiter verfahren.

Übungsaufgaben: 1) Die Durchdringung zweier geraden Pyramiden zu konstruieren, wovon die eine ihre Grundfläche in $\mathfrak{T}_1$, die andere in $\mathfrak{T}_2$ hat.

2) Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche in der horizontalen Tafel, und eine gerade Pyramide, deren Grundfläche in der Seiten- oder Profilebene liegt, durchdringen sich; ihre Schnittfigur zu suchen.

*) Die Deckfiguren der Prismen sind in der Figur weggelassen, daher fehlen auch die Gegenseiten der Grundlinien in den Parallelogrammen.

A n h a n g.

Verschiedene Übungsaufgaben.

1) Durch den Punkt a_2 ($x = 0, z = 3$) eine Gerade senkrecht zu $\mathfrak{T}_2$ zu ziehen, dieselbe in ein rechtwinkliges System $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$, und in ein schiefwinkliges System $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_4$ mit dem Winkel $\alpha = 72^\circ$ zu projizieren.

2) Durch den Punkt a ($x = 2, y = -3, z = 4$) Parallele zu $\mathfrak{T}_1$, zu $\mathfrak{T}_2$, zur Achse zu legen und die Schnittpunkte einer jeden mit der Seitenebene ($\mathfrak{T}_3$) zu suchen.

3) Die Gerade durch Punkt a ($0, -1, 3$) und Punkt b ($2, 3, -2$) oder durch Punkt c ($0, 4, 6$) und Punkt d ($3, 4, -6$) zu legen und ihre Spuren mit $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ und der Seitenebene $\mathfrak{T}_3$ anzugeben.

4) Die Gerade durch a ($0, -2, -3$) und b ($0, 3, -4$) zu ziehen, ihre Spuren und ihre Winkel mit den drei rechtwinkligen Tafeln aufzusuchen.

5) Aus den Spuren s_1 ($0, -5$) und t_2 ($4, -3$) die Gerade zu zeichnen.

6) Durch den Punkt p ($3, -4, 2$) eine Gerade zu legen, welche a) die Gerade bc in ihrem ersten Spurpunkte schneidet, b) zu ihrer parallel läuft. b ($0, -3, -3$), c ($3, 3, 1$).

7) In der Geraden bc der vorigen Aufgabe den Punkt zu bestimmen, welcher von $\mathfrak{T}_1$ den Abstand -2 oder von $\mathfrak{T}_2$ den Abstand $+1$ hat.

8) Einen Punkt in den Halbierebenen des Systems $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3$ (erste Tafel und Seitenebene) anzugeben.

9) Die Seitenspur der durch den Punkt a ($0, 4, 3$) und die Achse gehenden Ebene zu finden.

10) Durch einen gegebenen Punkt a ($0, 5, 4$) eine Gerade zu legen, deren (umgeklappte) Spuren sich decken oder symmetrisch zur Achse liegen.

11) Durch eine bekannte Gerade eine Ebene zu führen, deren Spuren sich decken oder symmetrisch zur Achse verlaufen.

12) Aus dem Punkte a ist auf die Ebene bcd eine Senkrechte zu fallen und die wirkliche Grösse derselben sowie der Winkel, den sie mit der Ebene acd bildet, anzugeben.

13) Von zwei sich kreuzenden Geraden ist je ein Punkt a ($0, -3, -5$) und b ($0, 4, -5$), dann der erste Spurpunkt s_1

($-2, -3$) der einen, und der zweite Spurpunkt t_2 ($-3, 4$) der anderen gegeben; man suche den Winkel der Geraden, sowie die Winkel einer jeden mit den Tafeln.

14) Gegeben ist eine Ebene (abc) und ein Riss (f_1g_1) einer in ihr liegenden Geraden; man bestimme den anderen Riss dieser Geraden, zeichne die Ebene, welche durch sie senkrecht zu gegebenen Ebene geht und suche die Winkel der neuen Ebene gegen die Tafeln.

15) Die Schnittlinie zweier Ebenen zu suchen, von welchen je eine Spur und die Winkel mit der gleichnamigen Tafel gegeben sind.

16) In einer Geraden, welche durch Punkt a ($0, 2, 4$) geht und mit $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\alpha = 30^\circ$ und mit $\mathfrak{T}_2$ den Winkel $\beta = 45^\circ$ einschliesst, denjenigen Punkt zu bestimmen, welcher von a den Abstand 3 hat.

17) Den Neigungswinkel zweier Ebenen aufzusuchen, von welchen die eine mit $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\alpha = 60^\circ$, und mit $\mathfrak{T}_2$ den Winkel $\beta = 30^\circ$, die andere mit $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\alpha' = 75^\circ$ und mit $\mathfrak{T}_2$ den Winkel $\beta' = 45^\circ$ bildet.

18) Aus einem gegebenen Punkte (a) nach einer gegebenen Ebene ST eine Strecke so zu ziehen, dass sie einer anderen gegebenen Ebene MN parallel ist und entweder eine gegebene Länge hat oder mit Ebene ST einen bestimmten Winkel einschliesst.

19) Den Neigungswinkel der Geraden ab zu jener Ebene zu suchen, welche durch die Achse parallel der Geraden cd geht. a ($3, 2, 8$), b ($0, 8, -2$), c ($0, 2, 2$), d ($5, 6, 7$).

20) Durch den Punkt a ($5, -1, 4$) eine Ebene zu führen, welche auf der ersten Halbierebene des Systems senkrecht steht, und deren Spuren den Winkel $\alpha = 60^\circ$ mit einander einschliessen.

21) Man suche die wahre Gestalt des Dreiecks abc , wenn

a ($8, 0, 0$) oder a ($5, 6, 4$) oder a ($0, 2, 3$)

b ($3, 0, 6$) b ($5, 4, 4$) b ($0, 3, 5$)

c ($3, 7, 0$) c ($2, 3, 7$) c ($0, 4, 2$).

22) Ein Dreieck abc , dessen Risse die entsprechenden Seiten gleichlang und parallel haben ($a_1b_1 \nparallel a_2b_2$ u. s. w.) in wahrer Grösse herzustellen.

23) Von einem Dreieck kennt man den ersten Riss und die Spuren seiner Ebene; es ist der zweite Riss und die wahre Gestalt desselben zu suchen.

24) Über der Geraden ab der gegebenen Ebene CD ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren.

25) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Ebene auf $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht, dessen eine Seite mit $\mathfrak{T}_2$ einen Winkel von 36° einschliesst, und dessen Mittelpunkt von $\mathfrak{T}_2$ einen bekannten Abstand ($d = 4$) hat.

26) Ein reguläres Sechseck zu konstruieren, dessen Mittelpunkt m ($0, 4, 5$) und dessen eine Seite $s = 5$ der Seitenebene parallel ist, dessen Ebene senkrecht zur Seitenebene und zur $\mathfrak{T}_2$ unter dem Winkel $\beta = 45^\circ$ geneigt ist.

27) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Ebene mit $\mathfrak{T}_1$ einen Winkel $\alpha = 60^\circ$ bildet, dessen Diagonale $d = 5$ zur Achse parallel ist.

28) Ein Dreikant zu konstruieren aus

$$\begin{array}{llllll}
 a = 72^\circ & \alpha = 90^\circ & a = 90^\circ & \alpha = 60^\circ & b = 54^\circ & \alpha = 60^\circ \\
 b = 90^\circ & b = 60^\circ & \beta = 60^\circ & a = 50^\circ & \beta = 60^\circ & \beta = 72^\circ \\
 c = 105^\circ & c = 45^\circ & \gamma = 45^\circ & b = 60^\circ & \gamma = 45^\circ & \gamma = 105^\circ \\
 & a = b = 60^\circ & & a = b = c = 60^\circ & & \\
 & c = 90^\circ & & a = b = c = 108^\circ & &
 \end{array}$$

29) Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Quadrat mit der Seite $ab = 4$, die Seitenkanten in a u. b seien $as = 5$, $bs = 3$, und der Winkel der Seitenfläche zur Grundfläche sei $\alpha = 120^\circ$; die Pyramide zu zeichnen.

30) Die Grundfläche einer Pyramide sei ein reguläres Sechseck mit dem Mittelpunkt $m(0, 3, 2)$ und dem Eckpunkte $a(3, 4, 4)$, die Ebene der Grundfläche bilde mit $\mathfrak{T}_1$ einen Winkel von 60° , im Seitendreieck sab sei $\sphericalangle sab = 30^\circ$ und $\sphericalangle sba = 45^\circ$, endlich sei der Winkel der Seitenfläche sab zur Grundfläche $= 90^\circ$; die Pyramide zu zeichnen.

31) Die Grundflächenebene abc einer Pyramide sei in einer Entfernung von 24 der $\mathfrak{T}_1$ parallel, die Seite bc der Grundfläche sei gleich 113 und in einem Abstände von 15 der Achse parallel, die Seite ab sei $= 75$ und $ac = 101$, die Seitenkante bs sei $= 112$ und das Seitendreieck sac sei gleichseitig; die Pyramide darzustellen. (Einheit 1 mm.)

32) Die Grundfläche abc einer Pyramide sei einem gegebenen Dreieck kongruent, die Seitenfläche abs einem andern gegebenem Dreiecke ähnlich und die Seitenfläche acs sei bei s rechtwinklig; die Pyramide zu zeichnen.

33) Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Viereck $abcd$, $a(-1, 2, 1)$, $b(2, 2, 3)$, $c(0, 4, 0)$, $d(5, 4, 2)$, die Seitenfläche abs sei gleichschenkelig mit dem Winkel 75° an der Grundlinie, die Höhe der Pyramide sei $= h$; die Pyramide darzustellen.

34) Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Quadrat $abcd$ in $\mathfrak{T}_1$, die Seite $ab = 20$, der Winkel der Seitenfläche abs zur Grundfläche sei $= 60^\circ$, jener der Seitenfläche $cbs = 45^\circ$, die Höhe der Pyramide gleich der doppelten Grundkante; die Pyramide zu zeichnen.

35) Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man die nicht in einer Tafel liegende Basis und die Höhe, und weiss ferner, dass der Fusspunkt der Höhe in den Mittelpunkt des der Basis umschriebenen Kreises fällt; die Pyramide darzustellen.

36) Eine vierseitige Pyramide zu zeichnen, wenn die Grundfläche (in $\mathfrak{T}_1$), die Neigung einer Seitenfläche zur Grundfläche und die beiden nicht in dieser Seitenfläche liegenden Seitenkanten gegeben sind.

37) Über einem gegebenen Quadrat eine Pyramide so zu konstruieren, dass die Neigungswinkel sämtlicher Seitenflächen untereinander gleich einem gegebenen Winkel $\alpha (= 108^\circ)$ werden.

38) Eine dreiseitige Pyramide zu konstruieren, wenn die 3 Neigungswinkel der Seitenebenen zu einander und die Ebene der Basis gegeben sind.

39) Eine dreiseitige Pyramide bei gegebener Grundfläche so zu konstruieren, dass die an der Spitze zusammenstossenden Seitenkanten rechte Winkel unter einander bilden.

40) Die Ecken eines Tetraeders sind durch ihre Projektionen gegeben; gesucht werden die Projektionen und die wahre Grösse der von einer Ecke auf die gegenüberliegende Ebene gefällten Senkrechten und die Neigungswinkel dieser Geraden zu den Tafeln.

41) Die quadratische Grundfläche, sowie zwei zusammenstossende Seitenflächen einer senkrechten, zur Grundfläche schief abgestumpften Pyramide sind gegeben. Es sollen die beiden Risse des Stumpfes, die wirkliche Gestalt der Deckfläche, der Winkel der Grundfläche mit einer Seitenfläche und der Winkel zweier Seitenflächen aufgesucht werden.

42) Ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche zu zeichnen, wenn eine Grundkante und das durch sie und die gegenüberstehende Deckkante bestimmte Rechteck gegeben sind.

43) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein in $\mathfrak{T}_2$ liegendes reguläres Sechseck mit dem Mittelpunkt m (5, 6) und der Ecke a (9, 5), während die Spitze s (0, 6) in $\mathfrak{T}_1$ liegen soll. Die Pyramide soll durch eine Ebene geschnitten werden, welche zur Kante as senkrecht steht und von der Spitze eine Entfernung ($d = 5$) hat.

44) Ein Tetraeder mit den Ecken a (10, 5, 35), b (20, 15, 0), c (0, 30, 10), d (40, 45, 50) soll durch eine Ebene geschnitten werden, welche durch den Mittelpunkt von cd parallel zu bd u. ac geführt wird.

45) In einer Ebene, deren Winkel zu den Tafeln gegeben sind, liegen zwei Punkte als Gegenecken eines Quadrats; über demselben ist eine gerade Pyramide konstruiert, deren Höhe der doppelten Grundkante gleich ist. Man schneide die Pyramide mit einer zu ihrer Grundfläche parallelen Ebene.

46) Eine dreiseitige Pyramide hat zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck; eine der Seitenkanten ist doppelt so gross als die Grundkante und bildet mit den anliegenden Grundkanten die Winkel 45° und 60° . Man schneide die Pyramide durch eine Ebene, welche im Mittelpunkt der gegebenen Seitenkante senkrecht zu ihr steht, suche die Risse und wahre Gestalt der Schnittfigur und das Netz des Pyramidenstumpfes.

47) Eine schiefe dreiseitige Pyramide hat ihre Grundfläche in $\mathfrak{T}_1$, ihre Spitze in $\mathfrak{T}_2$; dieselbe ist durch eine Ebene zu schneiden, welche auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche senkrecht steht.

48) Eine dreiseitige Pyramide durch eine Ebene zu schneiden, welche durch die Spitze, den Mittelpunkt der umschriebenen Kugel und den Schwerpunkt der Grundfläche geht.

49) Eine dreiseitige Pyramide durch eine Ebene zu schneiden, welche durch die Mittelpunkte der um- und eingeschriebenen Kugel geht und mit $\mathfrak{T}_1$ einen vorgeschriebenen Winkel bildet.

50) In einer Ebene, welche mit $\mathfrak{T}_1$ einen Winkel von 36° bildet, und deren erste Spur gegen die Achse des Systems unter

60° geneigt ist, liegt ein reguläres Sechseck mit der Seite $r = 3$, dessen Mittelpunkt gleichzeitig mit dem Halbierungspunkt einer Seite in der ersten Spur der Ebene liegt. Das Sechseck ist Basis einer geraden Pyramide mit der Höhe $h = 15$, deren Spitze in den II. Quadranten fallen soll. Man suche die Schnittfigur der Pyramide mit der I. Halbierebene.

51) Ein Prisma, dessen Grundfläche (in $\mathfrak{T}_1$) ein reguläres Fünfeck mit dem Mittelpunkte $m(0, 12)$ und dem Eckpunkt $a(0, 8)$ ist, hat zum Mittelpunkt der Deckfläche den Punkt $m'(11, 4, 10)$. Dasselbe ist durch eine Ebene zu schneiden, welche durch die Achse und den Punkt $p(6, 5, 3)$ geht.

52) Von einem Würfel befindet sich die Grundfläche in $\mathfrak{T}_1$, doch ist keine Seitenfläche der $\mathfrak{T}_2$ parallel. Es soll durch eine Ebene senkrecht zu einer Diagonale des Würfels eine Ecke desselben abgeschnitten und die wahre Gestalt der Schnittfigur ermittelt werden. Auch ist der Neigungswinkel der Schnittebene zu $\mathfrak{T}_2$ anzugeben.

53) Es ist die Durchdringungsfigur zweier Prismen, deren Grundflächen in $\mathfrak{T}_1$ liegen, zu suchen. Die Grundfläche des ersten sei ein Quadrat $abcd$, dessen Gegenpunkte $a(-4, 15)$, $c(12, 10)$ sind, während der obere Endpunkt der Achse $m(4, 4, 15)$ ist. Die Grundfläche des zweiten sei ein gleichseitiges Dreieck fgh mit den Ecken $f(2, 16)$ und $g(5, 10)$, während h die grösste Abscisse hat, und der Endpunkt der durch g gehenden Seitenkante sei $n(-7, 0, 15)$. (Einheit 1 cm.)

54) Die Durchdringung einer Pyramide und eines Prismas zu suchen. Die Grundfläche der Pyramide hat die Ecken $a(-30, 40, 0)$, $b(15, 15, 0)$, $c(30, 70, 0)$, ihre Seitenkanten sind gleichlang und die Spitze hat einen ersten Abstand $z = 80$. Das Prisma ist regelmässig vierseitig, seine Achse ist in der Entfernung $z = 30$ der $\mathfrak{T}_1$ parallel und ihre Endpunkte sind $m(-40, 55)$ und $n(40, 30)$, endlich ist die eine Diagonale der Grundfläche der $\mathfrak{T}_2$ parallel und hat eine Länge $= 40$. (Einheit 1 mm.)

55) Die Durchdringungsfigur der Tetraeder $abcd$ u. $efgh$ zu finden: $a(0, 6, 14)$, $b(0, 8, 7)$, $c(0, 1, 9)$, $d(9, 5, 10)$; $e(7, 4, 14)$, $f(3, 10\frac{1}{2}, 16)$, $g(0, 1, 15)$, $h(4, 5, 0)$. (Einheit 1 cm.)

56) Die Durchdringung folgender Pyramiden zu zeichnen: Die erste Pyramide ist regelmässig fünfseitig, die Ebene ihrer Grundfläche geht durch die Punkte $p(-12, 0, 0)$, $q(0, 7\frac{1}{2}, 0)$, $r(0, 0, -4\frac{1}{2})$, der Mittelpunkt der Grundfläche ist $m(0, 18, 0)$ und ein Eckpunkt $a(9, 18, 0)$, $h = 21$ die Höhe der Pyramide. Die Basis der zweiten Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken $f(-15, 0, 15)$, $g(-8, 0, 8)$, und ihre Spitze t hat die Koordinaten $7, 24, 15$. (Einheit 1 cm.)

248



Pözl, Wenzeslaus

Elemente der darstellenden Geometrie zum Schulgebrauch zusammengestellt
von Wenzeslaus Pözl

München 1890

Math.p. 430 f

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651552-5